マセマティカルクリアランスレベル 0–2 職員公開情報

セオレム番号: THM-099

フィールドクラス: Measure/Safe

理論実体マヌーバー: [*1] サイト-81BR 地下へのすべての出入口は施錠により封鎖し，同サイトのセキュリティ担当者が巡回又は監視により警備します．マセマティカルクリアランスレベル 3 以上の職員 2 名以上からの許可なく THM-099-A へ進入することは禁止されています．

説明: THM-099 は，位相空間 X に対する，その開集合系を包含する最小の σ-加法族の存在です．この σ-加法族は，X のボレル集合族とよばれます．

THM-099-A は，サイト-81BR 地下に存在する時空間異常です．THM-099-A は THM-099 により特徴づけられています．THM-099-A の詳細は別紙 1 を参照してください（閲覧にはマセマティカルクリアランスレベル 3 が必要です）．

特別無矛盾証明: [*2] X を集合，$(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ を X 上の σ-加法族の空でない族とします．その共通部分を

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

とおきます．以下に示すように，$\mathcal{A}$ は X 上の σ-加法族です:

(1) 任意の $i \in I$ に対して $\emptyset \in \mathcal{A}_i$ が成り立つので，$\emptyset \in \mathcal{A}$ です．
(2) $A \in \mathcal{A}$ と $i \in I$ を任意に取ります．このとき $A \in \mathcal{A}_i$ であり，$\mathcal{A}_i$ は σ-加法族ですから，$X \setminus A \in \mathcal{A}_i$ です．よって $X \setminus A \in \mathcal{A}$ です．
(3) $\mathcal{A}$ の元の可算族 $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ と $i \in I$ を任意に取ります．このとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $A_k \in \mathcal{A}_i$ であり，$\mathcal{A}_i$ は σ-加法族ですから，$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}_i$ です．よって $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$ です．

X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ は，X の開集合系を包含する X 上の σ-加法族です．よって，X の開集合系を包含する X 上の σ-加法族の全体は空でない族をなします．その共通部分を $\mathcal{B}(X)$ とおくと，$\mathcal{B}(X)$ も σ-加法族で X の開集合系を包含し，$\mathcal{B}(X)$ はそのような σ-加法族のなかで明らかに最小です．これで所望の σ-加法族が得られました． $\square$

補遺: マセマティカルクリアランスレベル 2 以下の職員で実化機 (realification device) の研究開発に参加を希望する方は，担当の（現在は藤田）上席研究員との面談の上で，個別マセマティカルクリアランスレベル 3/099 を申請可能です．詳細は直属の上司に問い合わせてください．

[*1] 編注: “Theoretical Hypostasis Maneuver”.
[*2] 編注: “Special Consistent Proof”.

マセマティカルクリアランスレベル 3–5 職員公開情報

セオレム番号: THM-099

フィールドクラス: Descriptive/Safe

理論実体マヌーバー: サイト-81BR 地下へのすべての入口は施錠により封鎖し，サイト-81BR のセキュリティ担当者が巡回または監視により警備します．

THM-099-A への進入は，（非個別）マセマティカルクリアランスレベル 3 以上の職員 1 名を含む標準規模以上のチームに対してのみ許可されます．チーム外の（非個別）マセマティカルクリアランスレベル 3 以上の職員 2 名以上からの許可なく THM-099-A へ進入することは禁止されています．進入チームの各メンバーは後続昇降機 (successor elevator) 及び実化機 (realification device) を装備しなければなりません．進入後のチームを含む物体を THM-099-A 地下 2 階以深から外部に輸送する場合はその前に，地下 1 階に設置された実化チャンバー (realification chamber) を用いて複雑化の影響を解消しなければなりません．

地下 ω_1 階以深の探索は禁止されています．当該階層以深に進入したすべての職員は MIA [*3]に指定されます．

専門のカウンセラーは，THM-099-A 離脱後の各チームメンバーに対してカウンセリングを実施します．その際，メンバー本人からの申し出に基づき，メンバーにクラス B 記憶処理を実施することが可能です．

説明: X を位相空間とします．各非零順序数 $\xi > 0$ に対し，階層 $\mathbf{\Sigma}^0_\xi, \mathbf{\Pi}^0_\xi$ を次で定義します:

- $\mathbf{\Sigma}^0_1$ を，X の開集合系として定める．
- $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ を，$\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ の元の補集合全体からなる集合と定める．
- $\xi > 1$ に対する $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ を，$\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Pi}^0_\xi$ の元の可算和全体からなる集合と定める．

X のボレル集合族を $\boldsymbol{B}$，最小の非可算極限順序数を ω_1 とおきます．THM-099 は，等式

$$\boldsymbol{B} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\xi$$

です．

THM-099-A は，サイト-81BR 地下に存在する時空間異常です．THM-099-A は THM-099 により構造的に充分明示されています．

THM-099-A 内部の状況は，階層を降りるごとに複雑化する傾向にあり，その完全又は具体的な明示は困難です．複雑化は主に実在の概念化・物質性及び厳格性の低下又は喪失からなり，対象に主として以下の影響を及ぼします:

- 物理的制約に反して変形，浮遊，消滅，出現又は空間的に重複する．
- 個体としての同一性を失い，他の個体との区別が困難になる．
- 詳細な物性の観察及び記述が困難になる．

これらの影響は THM-099-A に進入した人間に対しても発現するため，対象者は自我の拡散や解離を経験したり，離人感・現実感消失症の症状を呈することがあります．複雑化は深度及び曝露時間に応じて深刻化します．地下 1 階で受ける複雑化は事実上無害ですが，長時間の滞在は避けるべきです．複雑化は地下 1 階に設置

[*3] “Missing In Action” - 作戦行動中行方不明.

された実化チャンバーによって無害なレベルまで実化可能です．ただし，物質の複雑化はその現実性には影響を及ぼさないため，実化におけるスクラントン現実錨の効果は限定的です．有害なレベルに複雑化したままの物体を THM-099-A 外部に持ち出すことは，安全上の理由により禁止されています．

THM-099-A 内部における外部視点での時間（以下「相対時間」）の経過について，経過速度は直前の極限順序数階からの階数差に応じて急激に高くなり，その変化率は階数に応じて急激に高くなります．このため，例えば地下 1 階から地下 ω 階までの到達に掛かる相対時間と，地下 ω 階から地下 ω^2 階までの到達に掛かる相対時間は，それぞれ有限で概ね等しくなります．地下 1 階及び可算極限順序数地階（以下「安定階」）における相対時間の経過速度は，外部時間のそれと一致します．なお，1 が極限順序数でないにも関わらず他の極限順序数と同様に振舞っていることは，地下 1 階が最初の，即ち 0 番目の地階であることに起因すると仮説づけられています．THM-099-A 内部で外部との通信が可能な階層は安定階に限ります．

THM-099-A 出現前のサイト-81BR の地階は 5 階までが存在しましたが，現在までの探索により少なくとも地下 ε_0 [*4]階まで続いていることが判明しており，階層はすべての順序数を渡って存在していると予測されています．ただし，THM-099-A の異常性はサイト-81BR 地下の外部にまでは影響していません．また，地下 6 階以深に出現する物体は，その階以上の階層に残置された物体の反復又は変化した複製（以下単に「反復」）からなります．反復はもとの物体とは独立に振舞います．

後続昇降機等の適切な装備なしに，地下 1 階を除く THM-099-A の極限順序数地階からその上層へ戻ることは，内部構造により不可能です．また，相対時間 0 の階層が確認されていないことから，THM-099-A の地下 ω_1 階以深への進入は現状不可能です．この問題は後続昇降機の改良によって理論上は解消されますが，特別無矛盾証明に基づき，地下 ω_1 階以深の探索は不必要であると考えられています．

2015/06/07，THM-099-A はサイト-81BR の通用階段が地下 5 階以深へ延びていることが報告されたことで発見されました．その数時間後に地階における先述の複雑化が観測されたことで，サイト地階全体に避難命令が下され，封鎖に至りました．有害なレベルに至るまでの複雑化の過程が緩慢であったことから，サイト-81BR 地下に勤務していた職員は全員，無害なレベルの複雑化を受けるに留まり，避難は安全に完了しました．なお，希望した職員には後ほどカウンセリングが実施されました．当時地階に残置された物資は理論上回収可能ですが，その規模及び実化の必要のため，回収の実施はサイト-81BR 管理官が許可する重要物資に限られています．THM-099-A 内部の物資回収は充分に実施されたため，次回の計画は予定されていません．

実化機は，複雑化された周辺の物体を限定的かつ部分的に実化する端末で，THM-099-A 内部の長期的かつ安定的な探索に利用されています（提言を含む詳細は資料 6 を参照）．実化機の研究開発に従事するマセマティカルクリアランスレベル 2 以下の職員には，個別マセマティカルクリアランスレベル 3/099 が付与されます．個別クリアランスの付与には，当該職員直属の上司，サイト-81BR 管理官及び研究開発担当の（現在は藤田）上席研究員の全員の許可が必要です．また，個別クリアランス付与の必要性を審査するために，当該職員は担当上席研究員と最低 1 回の面談を実施しなければなりません．ただし，当該職員は個別マセマティカルクリアランスレベル 3/099 を付与されても，自身及び他の職員の THM-099-A への進入を許可することはできません．また，進入チームを当該職員のみから編成することもできません．

特別無矛盾証明: 超限帰納法により，任意の非零順序数 $\xi > 0$ に対して $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \subseteq \boldsymbol{B}$ が成り立つことを示します．これが分かれば，$\boldsymbol{B}$ が補演算で閉じていることから，任意の非零順序数 $\xi > 0$ に対して $\mathbf{\Pi}^0_\xi \subseteq \boldsymbol{B}$ が即座に従います．

まず，$\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \boldsymbol{B}$ は明らかです．次に順序数 $\xi > 1$ を，任意の $\eta < \xi$ に対して $\mathbf{\Sigma}^0_\eta \subseteq \boldsymbol{B}$ を満たすよう任意に取

[*4] $\alpha = \omega^\alpha$ を満たす最小の順序数．可算順序数の可算集合の上限であるため可算である．

ります．$A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ を任意に取ります．すると，$\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Pi}^0_\eta$ の元のある可算族 $(A_k)_{k\in\omega}$ が存在して $A = \bigcup_{k\in\omega} A_k$ を満たします．いま，各 $k \in \omega$ に対して $A_k \in \mathbf{\Pi}^0_\eta$ を満たす順序数 η が存在するので，

$$\eta(k) \coloneqq \min\{\eta \mid A_k \in \mathbf{\Pi}^0_\eta\}$$

とおくと，これは $0 < \eta(k) < \xi$ を満たします．$\boldsymbol{B}$ は補演算で閉じていますから，任意の $\eta < \xi$ に対して $\mathbf{\Pi}^0_\eta \subseteq \boldsymbol{B}$ です．よって各 $k \in \omega$ に対して，特に $\mathbf{\Pi}^0_{\eta(k)} \subseteq \boldsymbol{B}$ ですから，$A_k \in \boldsymbol{B}$ です．$\boldsymbol{B}$ は可算和で閉じていますから $\bigcup_{k\in\omega} A_k \in \boldsymbol{B}$ です．これで $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \subseteq \boldsymbol{B}$ を導けましたから，超限帰納法により，任意の非零順序数 $\xi > 0$ に対して $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \subseteq \boldsymbol{B}$ が成り立ちます．

これにより，特に $\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi \subseteq \boldsymbol{B}$ が成り立ちます．この逆の包含を示すため，$\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ が X 上の σ-加法族であることを示します．任意の非零順序数 $\xi > 0$ に対して $\mathbf{\Pi}^0_\xi \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}$ 及び $\mathbf{\Sigma}^0_\xi \subseteq \mathbf{\Pi}^0_{\xi+1}$ であることに注意します．

(1) $\emptyset \in \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ は明らかです．

(2) $A \in \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ を任意に取ります．ある $\xi < \omega_1$ が存在して，$A \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ となりますから，$X \setminus A \in \mathbf{\Pi}^0_\xi$ です．$\mathbf{\Pi}^0_\xi \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1}$ 及び $\xi + 1 < \omega_1$ ですから，$X \setminus A \in \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ です．

(3) $\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ の元の可算族 $(A_k)_{k\in\omega}$ を任意に取ります．各 $k \in \omega$ に対して

$$\xi(k) \coloneqq \min\{\xi \mid A_k \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi\} + 2$$

とおくと $\xi(k) > 2$ であり，$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+2}$ に注意すると $A_k \in \mathbf{\Sigma}^0_{\xi(k)}$ です．可算選択公理により，各 $k \in \omega$ に対して $\bigcup_{\eta<\xi(k)} \mathbf{\Pi}^0_\eta$ の元の可算族 $\left(B_{(k,l)}\right)_{l\in\omega}$ が存在して $A_k = \bigcup_{l\in\omega} B_{(k,l)}$ を満たします．

$$\eta(k,l) \coloneqq \min\{\eta \mid B_{(k,l)} \in \mathbf{\Pi}^0_\eta\}$$

とおくと，これは常に $0 < \eta(k,l) < \xi(k)$ を満たします．$\xi \coloneqq \sup_{k\in\omega} \xi(k)$ とおくと，（可算選択公理から従う）可算和定理により ξ は可算順序数ですから特に $\xi < \omega_1$ です．また，任意の $k \in \omega$ に対して $\xi(k) \leq \xi$ なので，任意の $(k,l) \in \omega^2$ に対して $\eta(k,l) < \xi$ です．全単射 $\omega^2 \cong \omega$ が存在するので，族 $\left(B_{(k,l)}\right)_{(k,l)\in\omega^2}$ は $\bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{\Pi}^0_\eta$ の元の可算族です．したがって，$\bigcup_{k\in\omega} A_k = \bigcup_{(k,l)\in\omega^2} B_{(k,l)}$ は $\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi$ に属します．

ボレル集合族の最小性により $\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi = \boldsymbol{B}$ が従います．即座に $\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\xi = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\xi$ も従います．これで証明が完了しました． $\square$

補遺 1: X が $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_2$ を満たす位相空間である場合，$\mathbf{\Sigma}^0_\xi \cup \mathbf{\Pi}^0_\xi \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\xi+1} \cap \mathbf{\Pi}^0_{\xi+1}$ が成り立つため，各非零順序数 $\xi > 0$ に対して $\mathbf{\Delta}^0_\xi \coloneqq \mathbf{\Sigma}^0_\xi \cap \mathbf{\Pi}^0_\xi$ と定めると，次の階層構造が得られます:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & & & \cdots \\
 & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 & & & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & & & \mathbf{\Delta}^0_3 & & \\
 & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{45}{$\subseteq$} & & \rotatebox{-45}{$\subseteq$} & \\
 & & \mathbf{\Pi}^0_1 & & & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & & & \cdots
\end{array}$$

更に X のボレル集合族について，もう一つの等号

$$\boldsymbol{B} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \boldsymbol{\Sigma}^0_\xi = \bigcup_{\xi<\omega_1} \boldsymbol{\Pi}^0_\xi = \bigcup_{\xi<\omega_1} \boldsymbol{\Delta}^0_\xi$$

も成立します．距離空間，特にポーランド空間はそのような例です．$\boldsymbol{\Sigma}^0_1 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^0_2$ は THM-099-A において成立しています．

補遺 2: 2019/02/09，THM-099-A 内部での実験中，地下 ω^ω 階周辺にて機動部隊 $\aleph$-1（“付番不能”）の反復が発見されました．機動部隊 $\aleph$-1 は第 2 回探索において地下 ε_0 階でサイト指令部との通信を行って以降安否不明であり，部隊員は全員 MIA に指定されています（探索ログは資料 3 を参照）．なお，第 2 回探索当時に後続昇降機及び実化機は未開発であり，部隊の反復がどのように消失地点を遡って上層に出現したのかは不明です．部隊の反復は，突起を多数もつアメーバ状かつ無色の単一個体としてかろうじて光学的に観測可能であったものの，呼びかけや接触等による物理的な干渉は不可能でした．発見時，目撃者の一人が実化機を起動していたことにより反復は部分的に実化され，部隊員だった全 5 名は互いに空間的に重複した状態で出現し，床に倒れこんだ後間もなく静止しました．反復は一時的に回収されましたが，上層への輸送中に急激な風化により消失しました．

その後の調査の結果，機動部隊 $\aleph$-1 の反復はその他の階層においても発見されました．部隊の反復を実化し，又はその組成を調査する試みは全て失敗に終わっています．