ボイボ寮生 数学講座 ノート

第 1 講　位相空間入門

麻崎系 @cor_asazaki

2024 年 6 月 8 日

概要

本講では，位相空間論の第一歩として，基本的な位相構造（開集合系・閉集合系，近傍系）とその繋がりを段階的に解説する．また，位相空間論を導入することの一例として，コンパクト性に関する議論から最大値最小値定理を証明する．その他の位相構造（開核作用素・閉包作用素など），位相空間の作り方の一部（商位相など），位相的性質（連結性，分離公理，可算公理など），点列の収束などについては，解説を省略する．

可読性を期して，記述を冗長にした部分がある．特に読者に確認を委ねる部分は，青字で示した．

目次

1　ユークリッド空間と距離空間

1.1　ユークリッド距離から定まる開集合と近傍

正の整数 n に対し，$\mathbb{R}$ の n 個直積を $\mathbb{R}^n$ で書き表す．よく知られているように，ユークリッド平面上の 2 点 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ の距離 $d(x,y)$ は，

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

で計算される．これは，$\mathbb{R}^2$ を実線型空間と見たときに備わるユークリッドノルム $\|\cdot\|_2$ を用いて，

$$d(x,y)=\|x-y\|_2$$

と表される．このことを念頭に，より一般の $\mathbb{R}^n$ において，2 点間の距離を定義する．

定義 1.1.1. n を正の整数とする．$\mathbb{R}^n$ 上に定義されるユークリッドノルムを $\|\cdot\|_2$ とおく．$\mathbb{R}^n$ 上の 2 点 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)$ に対し，x と y の間の**ユークリッド距離** $d_{\mathbb{R}^n}(x,y)$ を，

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}^n}(x,y) &:= \|x-y\|_2 \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \end{aligned}$$

で定義する．$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n **次元ユークリッド空間**という．

このようにして定まるユークリッド距離は，次の性質をはじめとした多くの特徴をもつ．

命題 1.1.2. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とする．任意の $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ に対し，次が成り立つ．

(1) $d_{\mathbb{R}^n}(x,y)\geq 0$ である．また，$d_{\mathbb{R}^n}(x,y)=0$ であることと $x=y$ であることは同値である．
(2) $d_{\mathbb{R}^n}(x,y)=d_{\mathbb{R}^n}(y,x)$ である．
(3) $d_{\mathbb{R}^n}(x,z)\leq d_{\mathbb{R}^n}(x,y)+d_{\mathbb{R}^n}(y,z)$ である．

［証］ (1) と (2) は明らか．(3) は，$(x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対する Cauchy-Schwarz の不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)$$

から従う．（証明を完結させよ: (3) の両辺の 2 乗を考えよ）　　（証終）

続いて，1 次元ユークリッド空間における開区間の一般化として，次の概念を考える．以降，$\mathbb{R}_{>0}:=\{r\in\mathbb{R}\mid r>0\}$ と略記する．

定義 1.1.3. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とする．$x\in\mathbb{R}^n$ と $r\in\mathbb{R}_{>0}$ に対し，中心 x，半径 r の $\mathbb{R}^n$ 上の**開球** $B_{\mathbb{R}^n}(x;r)\subseteq\mathbb{R}^n$ を，

$$B_{\mathbb{R}^n}(x;r):=\{y\in\mathbb{R}^n\mid d_{\mathbb{R}^n}(x,y)<r\}$$

で定義する．

1 次元の場合は，とりもなおさず開区間 $B_{\mathbb{R}}(x;r)=(x-r,x+r)$ である．更に図に描いていくと，2 次元の場合は円，3 次元の場合は球の形状になる．

定義 1.1.4. $(\mathbb{R}^n,d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とし，$p\in\mathbb{R}^n$，$A\subseteq\mathbb{R}^n$ とする．

(1) p が A の $\mathbb{R}^n$ 上の**内点**であるとは，ある $r\in\mathbb{R}_{>0}$ が存在して $B_{\mathbb{R}^n}(p;r)\subseteq A$ となることをいう．
A の $\mathbb{R}^n$ 上の内点全体の集合を A の $\mathbb{R}^n$ 上の**内部**といい，A^i で書き表す．

(2) p が A の $\mathbb{R}^n$ 上の**外点**であるとは，p が $\mathbb{R}^n\setminus A$ の内点であることをいう．
A の $\mathbb{R}^n$ 上の外点全体の集合を A の $\mathbb{R}^n$ 上の**外部**といい，A^e で書き表す．

(3) p が A の $\mathbb{R}^n$ 上の**境界点**であるとは，p が A の $\mathbb{R}^n$ 上の内点でも外点でもないことをいう．
A の $\mathbb{R}^n$ 上の境界点全体の集合を A の $\mathbb{R}^n$ 上の**境界**といい，∂A で書き表す．

(4) A の $\mathbb{R}^n$ 上の**閉包** $\overline{A}$ を，$\overline{A}:=A^i\cup\partial A$ で定義する．$\overline{A}$ は A^a で書き表すこともある．

例 1.1.5. $(\mathbb{R}^2,d_{\mathbb{R}^2})$ を 2 次元ユークリッド空間とする．$A:=B_{\mathbb{R}^2}((0,0);1)\subseteq\mathbb{R}^2$ とおく．

(i) $A^i=\{x\in\mathbb{R}^2\mid d_{\mathbb{R}^2}((0,0),x)<1\}=A$ である．
(ii) $A^e=\{x\in\mathbb{R}^2\mid d_{\mathbb{R}^2}((0,0),x)>1\}$ である．
(iii) $\partial A=\{x\in\mathbb{R}^2\mid d_{\mathbb{R}^2}((0,0),x)=1\}$ である．

［証］ (i) $x\in A$ を任意に取る．このとき，$d_{\mathbb{R}^2}((0,0),x)<1$ である．よって，$r:=1-d_{\mathbb{R}^2}((0,0),x)$ とおくと，$r\in\mathbb{R}_{>0}$ である．このもとで，$B_{\mathbb{R}^2}(x;r)\subseteq A$ を示す．$y\in B_{\mathbb{R}^2}(x;r)$ を任意に取る．このとき，$d_{\mathbb{R}^2}(x,y)<r$ である．よって，三角不等式より，

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{R}^2}((0,0),y)&\leq d_{\mathbb{R}^2}((0,0),x)+d_{\mathbb{R}^2}(x,y)\\&<1-r+r\\&=1\end{aligned}$$

である．よって，$y\in A$ である．以上より，x は A の $\mathbb{R}^n$ 上の内点であるから，$A\subseteq A^i$ である．逆に，A の $\mathbb{R}^n$ 上の内点は定義より明らかに A の要素である．よって，$A^i\subseteq A$ である．従って，$A^i=A$ である．
(ii) と (iii) の証明は読者に任せる． （証終）

$A\subseteq\mathbb{R}^n$ とすると，定義から明らかに，

$$\mathbb{R}^n=A^i\sqcup A^e\sqcup\partial A$$

である．つまり，もとの空間は，内部と外部と境界の非交和である．これは，A の内点でも境界点でもない点はちょうど A の外点であることを意味する．よって，特に，$A^c:=\mathbb{R}^n\setminus A$ と略記すると，

$$\overline{A}(=A^a)=A^i\sqcup\partial A=A^{ec}=A^{cic}$$

である．言い換えると，任意の $x\in\overline{A}$ と任意の $r\in\mathbb{R}_{>0}$ に対し，

$$B_{\mathbb{R}^n}(x;r)\cap A\neq\emptyset$$

である．この意味で，A の $\mathbb{R}^n$ 上の閉包の点は A の $\mathbb{R}^n$ 上の**触点**とも呼ばれる．

これで，n 次元ユークリッド空間に，開集合の概念を導入できる．これは，1 次元や 2 次元のときの要請にちょうど合致する．

定義 1.1.6. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とし，$A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする．

(1) A が $A = A^i$ を満たすとき，A を $\mathbb{R}^n$ の**開集合**という．
$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ の開集合全体の集合を，$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ の**開集合系**といい，$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ で書き表す．
(2) A が $A = \overline{A}$ を満たすとき，A を $\mathbb{R}^n$ の**閉集合**という．
$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ の閉集合全体の集合を，$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ の**閉集合系**といい，$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ で書き表す．
(3) A が $\mathbb{R}^n$ の開集合でも閉集合でもあるとき，A を $\mathbb{R}^n$ の**開かつ閉集合**という．

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，$A^{ii} = A^i$ かつ $A^{aa} = A^a$ である（確かめよ）．よって，A^i は $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\overline{A}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である．また，先ほどの議論から，A が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることと，$\mathbb{R}^n \setminus A = A^c$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることは，同値である．

例 1.1.5 で済ませた証明と同様にして，$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ の任意の開球が $\mathbb{R}^n$ の開集合となることが分かる．しかし，開球だけが $\mathbb{R}^n$ の開集合のすべてではない．例えば，$\emptyset, \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ の二者は明らかに $\mathbb{R}^n$ の開集合である．ちなみに，$\mathbb{R}^n \setminus \emptyset = \mathbb{R}^n$ であることから，この二者はまた $\mathbb{R}^n$ の閉集合でもある．つまり，$\emptyset$ と $\mathbb{R}^n$ は共に $\mathbb{R}^n$ の開かつ閉集合である．この事実は，$A \subseteq \mathbb{R}^n$ が開集合だからといって閉集合でないとも，逆に $A \subseteq \mathbb{R}^n$ が閉集合だからといって開集合でないとも，いずれにも主張できないことを意味する．開集合かどうかの判定は，定義どおり行わなければならない．

最後に，近傍の概念を定義する．

定義 1.1.7. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とし，$p \in \mathbb{R}^n$，$A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする．

(1) A が p の $\mathbb{R}^n$ 上**近傍**であるとは，p が A の $\mathbb{R}^n$ 上の内点であることをいう．
p の $\mathbb{R}^n$ 上近傍全体の集合を，p の（$\mathbb{R}^n$ 上の）**近傍系**といい，$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ で書き表す．各点の近傍系による族 $(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p))_{p \in \mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ の**近傍系**という．
(2) A が p の $\mathbb{R}^n$ 上近傍であり，かつ，A が $\mathbb{R}^n$ の開集合でもあるとき，A を p の $\mathbb{R}^n$ 上**開近傍**という．

$p \in \mathbb{R}^n$ とすると，p を中心とする開球はすべて p の $\mathbb{R}^n$ 上開近傍である．また，開近傍は近傍である．

以降では，ユークリッド空間における開集合と近傍の性質および関係性を観察し，より一般の場合である距離空間や位相空間における議論に役立てていく．

1.2 開集合の性質

まず，定義から即座に従う，開集合の簡単な言い換えを述べておく．

命題 1.2.1. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間，$U \subseteq \mathbb{R}^n$ とする．このとき，以下は同値である．

(a) U は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．
(b) 任意の $p \in U$ に対して，ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在し，$B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq U$ である．

［証］ 共に，任意の $p \in U$ が U の $\mathbb{R}^n$ 上の内点であることと同値である．（証終）

そのうえで，開集合系がもつ基本的な性質を 3 つ挙げる．

命題 1.2.2. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間，$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ を $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ の開集合系とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ である．

(2) 任意の $\mathbb{R}^n$ の開集合族 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ である．

(3) 任意の $U_0, U_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対し，$U_0 \cap U_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ である．

［証］

(1) 既に述べた．

(2) $\mathbb{R}^n$ の開集合族 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意に取る．$p \in \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を任意に取る．このとき，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p \in U_\lambda$ である．この λ を一つ取る．p は U_λ の $\mathbb{R}^n$ 上の内点であるから，ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq U_\lambda$ である．この r を一つ取る．すると，$B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ である．従って，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

(3) $U_0, U_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ を任意に取る．$p \in U_0 \cap U_1$ を任意に取る．このとき，p は，$p \in U_0$ より U_0 の $\mathbb{R}^n$ 上の内点であり，かつ，$p \in U_1$ より U_1 の $\mathbb{R}^n$ 上の内点である．よって，ある $r_0, r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，$B_{\mathbb{R}^n}(p; r_0) \subseteq U_0$ かつ $B_{\mathbb{R}^n}(p; r_1) \subseteq U_1$ である．この r_0 と r_1 を一つずつ取る．ここで，$r := \min\{r_0, r_1\}$ とおくと，$r \in \mathbb{R}_{>0}$ であり，更に，

$$B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq B_{\mathbb{R}^n}(p; r_0),$$
$$B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq B_{\mathbb{R}^n}(p; r_1)$$

である．よって，特に $B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq U_0 \cap U_1$ である．従って，$U_0 \cap U_1$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．（証終）

特に，命題 1.2.2 (3) を（有限回）繰り返し適用することにより，有限個の開集合の共通部分が再び開集合になることが示せる．なお，これを無限回適用することはできない．つまり，無限個の開集合の共通部分は，再び開集合になるとは限らない．

例 1.2.3. 1 次元ユークリッド空間において，$n \in \mathbb{N}$ に対し，$I_n \subseteq \mathbb{R}$ を $I_n := \left(0, 1 + 2^{-n}\right)$ で定める．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し I_n は $\mathbb{R}$ の開集合であるが，一方，

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = (0, 1]$$

で，これは $\mathbb{R}$ の開集合ではない（定義に基づいて確かめよ）．

開集合の補集合が閉集合（，閉集合の補集合が開集合）であることから，本節の今までの話の補集合を考えることにより，次の閉集合系の性質が直ちに従う．

系 1.2.4. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間，$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$ を $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ の閉集合系とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$ である．

(2) 任意の $\mathbb{R}^n$ の閉集合族 $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$ である．

(3) 任意の $F_0, F_1 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$ に対し，$F_0 \cup F_1 \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}$ である．

ところで，$A \subseteq \mathbb{R}^n$ の内部 A^i と閉包 $\overline{A}$ は，次のように別口から特徴付けられる．

命題 1.2.5. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とし，$A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする．このとき，A^i は，A に包まれる $\mathbb{R}^n$ の開集合として（包含関係で）最大である．また，$\overline{A}$ は，A を包む $\mathbb{R}^n$ の閉集合として（包含関係で）最小である．

［証］ A^i についてのみ示す．$U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ を，$U \subseteq A$ を満たすよう任意に取る．このもとで，$p \in U$ を任意に取る．このとき，U は p の $\mathbb{R}^n$ 上開近傍であるから，ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，$B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq U$ である．この r を一つ取る．すると，$B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq A$ であるから，p は A の $\mathbb{R}^n$ 上の内点である．よって，$p \in A^i$ である．つまり，$U \subseteq A^i$ である．従って，$A^i \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ であったことと併せて，A^i が，A に包まれる $\mathbb{R}^n$ の開集合として（包含関係で）最大であることが示された．

$\overline{A}$ については，$\mathbb{R}^n$ 上の外部 A^e について考察することで証明できる．（証終）

この証明から，次のことが従う．

系 1.2.6. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とし，$A \subseteq \mathbb{R}^n$ とする．

$$A^i = \bigcup \{U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n} \mid U \subseteq A\},$$
$$\overline{A} = \bigcap \{F \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n} \mid A \subseteq F\}$$

である．

最後に，定義 1.1.7 により，開集合系は近傍系を定めた．この反対に，近傍系は開集合を特徴付けることができる．

1.3 近傍の性質

開集合の特徴は，近傍系を用いて次のように表される．これを使えば，閉集合の特徴を近傍系で記述することもできる．

命題 1.3.1. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間，$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合系，$(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p))_{p \in \mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ の近傍系とし，$U \subseteq \mathbb{R}^n$ とする．以下は同値である．

(a) $U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ である．
(b) 任意の $p \in U$ に対し，$U \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ である．

［証］ 共に，任意の $p \in U$ が U の $\mathbb{R}^n$ 上の内点であることと同値である．（証終）

そのうえで，近傍系がもつ基本的な性質を 4 つ挙げる．

命題 1.3.2. $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とし，$(\mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p))_{p \in \mathbb{R}^n}$ を $\mathbb{R}^n$ の近傍系とする．任意の $p \in \mathbb{R}^n$ に対し，次が成り立つ．

(1) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ である．また，任意の $N \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ に対し $p \in N$ である．
(2) 任意の $N_0, N_1 \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ に対し，$N_0 \cap N_1 \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ である．
(3) 任意の $N \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ と任意の $M \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，$N \subseteq M$ ならば $M \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ である．
(4) 任意の $N \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ に対して，ある $M \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ が存在し，任意の $q \in M$ に対して，$N \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(q)$ が成り立つ．

［証］

(1) $\mathbb{R}^n$ は，$\mathbb{R}^n$ の開集合であるから，各点 $p \in \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ 上の内点にもつ．また，p の $\mathbb{R}^n$ 上近傍 N は p を $\mathbb{R}^n$ 上の内点にもつから，内点の定義より直ちに $p \in N$ である．
(2) N_0 と N_1 は共に p を $\mathbb{R}^n$ 上の内点にもつから，ある $r_0, r_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，$B_{\mathbb{R}^n}(p; r_0) \subseteq N_0$ かつ $B_{\mathbb{R}^n}(p; r_1) \subseteq N_1$ が成り立つ．この r_0 と r_1 を一つずつ取る．このもとで $r := \min\{r_0, r_1\}$ とおくと，$r \in \mathbb{R}_{>0}$ であり，かつ，$B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq N_0 \cap N_1$ である．よって，$N_0 \cap N_1 \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ である．
(3) N は p を $\mathbb{R}^n$ 上の内点にもつから，ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq N$ である．この r を一つ取る．すると，$B_{\mathbb{R}^n}(p; r) \subseteq M$ である．よって，$M \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ である．
(4) $M = N^i$ とおく．N は p を $\mathbb{R}^n$ 上の内点にもつから，$N^i \neq \emptyset$ であるので，$M \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(p)$ である．ここで，M は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるから，任意の $q \in M$ に対し $M \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(q)$ である．よって，$M = N^i \subseteq N$ と (3) より，任意の $q \in M$ に対し $N \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^n}(q)$ である．（証終）

1.4 距離空間

これまでの議論は，命題 1.1.2 にあるユークリッド距離の 3 性質のみに全く基づいて進められてきた．つまり，逆に，この 3 性質を満たすような “距離” が定義されていさえすれば，そこから開集合や近傍の概念を整備することができる，ということになる．後で見るように，そのような “距離” は，今まで触れてきた $d_{\mathbb{R}^n}$ のほかにも色々ある．そこで，話を一般化しよう．

定義 1.4.1 (距離の公理)**.** X を集合，$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ を写像とする．d が X 上の**距離関数**であるとは，d が以下の条件をすべて満たすことをいう:

(d1) 任意の $x, y \in X$ に対し，$d(x, y) \geq 0$ である[*1]．
　　また，任意の $x, y \in X$ に対し，$d(x, y) = 0$ であることと $x = y$ であることは，同値である．
(d2) 任意の $x, y \in X$ に対し，$d(x, y) = d(y, x)$ である．
(d3) 任意の $x, y, z \in X$ に対し，$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ である．

X と X 上の距離関数 d の組 (X, d) を，**距離空間**という．

例 1.4.2. n を正の整数とする．$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ とする．

- 定義 1.1.1 で定義された $d_{\mathbb{R}^n}$ は，距離関数である．
- $d_{\mathrm{disc}}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$d_{\mathrm{disc}}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \text{ のとき}, \\ 1, & x \neq y \text{ のとき} \end{cases}$$

  で定義する．d_{disc} は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である．d_{disc} を**離散距離**という．
- $d^{(1)}_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$d^{(1)}_{\mathbb{R}^n}(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

[*1] この条件は，(d1) の残りと (d2) 及び (d3) から導ける．よって，仮定しても仮定しなくてもよい．敢えて仮定しているのは，慣例によるものである．

で定義する．$d^{(1)}_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である（確かめよ）．

- $d^{(\infty)}_{\mathbb{R}^n} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を，$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$d^{(\infty)}_{\mathbb{R}^n}(x, y) := \max_{i \in \{1, \cdots, n\}} |x_i - y_i|$$

で定義する．$d^{(\infty)}_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である（確かめよ）．

ここでは，離散距離が距離関数であることを確かめよう．証明を見てのとおり，離散距離はあらゆる集合上に定義できることが分かる．

［例 1.4.2 第 2 例 証］

(1) 定義より明らか．
(2) $x, y \in \mathbb{R}^n$ を任意に取る．このとき，$x = y$ ならば $y = x$ であり，かつ，$x \neq y$ ならば $y \neq x$ である．
よって，$d_{\mathrm{disc}}(x, y) = d_{\mathrm{disc}}(y, x)$ である．
(3) $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ を任意に取る．$x = z$ のときはよい．$x \neq z$ のときは，「$x = y$ かつ $y = z$」が不成立であるので，$d_{\mathrm{disc}}(x, y) + d_{\mathrm{disc}}(y, z) \geq 1 = d_{\mathrm{disc}}(x, z)$ である．

以上より，d_{disc} は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である．（証終）

こうして距離が定義されたうえで，先ほどの話の一般論を展開する．

定義 1.4.3. (X, d) を距離空間とする．$x \in X$，$r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，中心 x，半径 r の X 上の**開球** $B_d(x; r) \subseteq X$ を，

$$B_d(x; r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

で定義する．

定義 1.4.4. (X, d) を距離空間とし，$p \in X$，$A \subseteq X$ とする．

(1) p が A の X 上の**内点**であるとは，ある $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $B_d(p; r) \subseteq A$ となることをいう．
A の X 上の内点全体の集合を A の X 上の**内部**といい，A^i で書き表す．
(2) p が A の X 上の**外点**であるとは，p が $X \setminus A$ の内点であることをいう．
A の X 上の外点全体の集合を A の X 上の**外部**といい，A^e で書き表す．
(3) p が A の X 上の**境界点**であるとは，p が A の X 上の内点でも外点でもないことをいう．
A の X 上の境界点全体の集合を A の X 上の**境界**といい，∂A で書き表す．
(4) A の X 上の**閉包** $\overline{A}$ を，$\overline{A} := A^i \cup \partial A$ で定義する．$\overline{A}$ は A^a で書き表すこともある．

定義 1.4.5. (X, d) を距離空間とし，$A \subseteq X$ とする．

(1) A が $A = A^i$ を満たすとき，A を X の**開集合**という．
(X, d) の開集合全体の集合を，(X, d) の**開集合系**といい，$\mathcal{O}_d \subseteq \mathcal{P}(X)$ で書き表す．
(2) A が $A = \overline{A}$ を満たすとき，A を X の**閉集合**という．
(X, d) の閉集合全体の集合を，(X, d) の**閉集合系**といい，$\mathcal{A}_d \subseteq \mathcal{P}(X)$ で書き表す．
(3) A が X の開集合でも閉集合でもあるとき，A を X の**開かつ閉集合**という．

定義 1.4.6. (X, d) を距離空間とし，$p \in X$，$A \subseteq X$ とする．

(1) A が p の X 上**近傍**であるとは，p が A の X 上の内点であることをいう．
   p の X 上近傍全体の集合を，p の（X 上の）**近傍系**といい，$\mathcal{N}_d(p) \subseteq \mathcal{P}(X)$ で書き表す．各点の近傍系による族 $(\mathcal{N}_d(p))_{p \in X}$ を X の**近傍系**という．
(2) A が p の X 上近傍であり，かつ，A が X の開集合でもあるとき，A を p の X 上**開近傍**という．

距離空間上で斯様に定義された開集合と近傍は，ユークリッド空間のときと同様の性質をもつ．開集合の任意個の和集合は開集合であるし，同一の点に対する 2 つの近傍の共通部分は再びその点の近傍である，$A \subseteq X$ に対し $X = A^i \sqcup A^e \sqcup \partial A$ である，等々．

ところが一般に，同じ集合 X 上であっても，異なる距離 $d_0, d_1 \colon X \times X \to \mathbb{R}$ が定義された場合，それぞれの距離空間 $(X, d_0), (X, d_1)$ のあいだで開集合系や近傍系が一致するとは限らない．例 1.4.2 にあるもののうち，$d_{\mathbb{R}^2}$ と d_{disc} が $\mathbb{R}^2$ 上に定める距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2}), (\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{disc}})$ のそれぞれにおいて，中心 $(0,0)$，半径 1 の開球は，

$$B_{\mathbb{R}^2}((0,0);1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},$$
$$B_{d_{\mathrm{disc}}}((0,0);1) = \{(0,0)\}$$

となる．特に，$(\mathbb{R}^2, d_{\mathrm{disc}})$ においては任意の一点集合が開集合となるが，$(\mathbb{R}^2, d_{\mathbb{R}^2})$ ではそうならない．図に描くと，より一層違いが目立つ．そいういうわけで，異なる距離を定めると異なる空間が生まれることが往々にしてある．一方，その反対に，見かけでは異なる距離を定めていても，それらが定める構造が一致する，ということも起こりうる．特殊な例としては，再び例 1.4.2 において，$d_{\mathbb{R}^n}, d_{\mathbb{R}^n}^{(1)}, d_{\mathbb{R}^n}^{(\infty)}$ がそれぞれ $\mathbb{R}^n$ 上に定める開集合系は，互いに一致する（それぞれの距離空間における内点について考察することで確かめてみよ）．より一般の距離空間に対する例としては，次が成り立つ．

例題 1.4.7. (X,d) を距離空間とする．写像 $d' \colon X \times X \to \mathbb{R}$ を，$x, y \in X$ に対し，

$$d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

で定義する．d' は X 上の距離である．また，(X,d) の開集合系 $\mathcal{O}_d$ と，(X,d') の開集合系 $\mathcal{O}_{d'}$ は，一致する．

こうして作られた距離 d' は，任意の $x, y \in X$ に対して $d'(x,y) \leq 1$ を満たす．つまり，任意の距離空間は，有界な距離関数で距離付けし直せる．この事実は（以降本講では使わないが）たまに使う[*2]．ここに，距離空間における有界の概念をちゃんと定義しておく．

定義 1.4.8. (X,d) を距離空間とし，$A \subseteq X$ とする．

$$\mathrm{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x,y) \in [0, \infty]$$

を，A の（d による）**直径**という．A が（(X,d) 上）**有界**であるとは，$\mathrm{diam}(A)$ が有限であることをいう．

[*2] 用例を挙げておこう：“We may assume $\rho \leqq 1$ and ...” [5]．ここに，ρ は距離関数．

2　位相空間の開集合系と近傍系

2.1　開集合系と近傍系

これまでの話を，もっと一般化しよう．定義 1.4.1 でユークリッド空間に備わる多くの性質を捨て去ったように，距離空間に備わる多くの性質を更に忘れることにする．あとに残るのは，まず一つ，開集合系と閉集合系である．

定義 2.1.1 (開集合系の公理)**.** X を集合とする．部分集合族 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X の**開集合系**ないし**位相**であるとは，$\mathcal{O}$ が以下の条件をすべて満たすことをいう:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ である．
(O2) $\mathcal{O}$ の任意の部分族 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である．
(O3) 任意の $U_0, U_1 \in \mathcal{O}$ に対し，$U_0 \cap U_1 \in \mathcal{O}$ である．

X と X の位相 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ を，**位相空間**という．X に入れる位相が文脈から明らかなときは，単に X を位相空間という．$\mathcal{O}$ の要素を，X の**開集合**という．

定義 2.1.2 (閉集合系の公理)**.** X を集合とする．部分集合族 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が X の**閉集合系**であるとは，$\mathcal{A}$ が以下の条件をすべて満たすことをいう:

(A1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ である．
(A2) $\mathcal{A}$ の任意の部分族 $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{A}$ である．
(A3) 任意の $F_0, F_1 \in \mathcal{A}$ に対し，$F_0 \cup F_1 \in \mathcal{A}$ である．

$\mathcal{A}$ の要素を，X の**閉集合**という．

開集合系の公理は補題 1.2.2，閉集合系の公理は系 1.2.4，それぞれそのままである．また，開集合系と閉集合系は，補集合を取ることで互いに同じ構造を定めることが，定義から即座に分かる．つまり，開集合系と閉集合系は，対応物を互いに同一視できる．特に，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において，$F \subseteq X$ が $X \setminus F \in \mathcal{O}$ を満たすとき，F を $(X, \mathcal{O})$ の**閉集合**という．

ここで，位相空間においては，先に構造が定められているため，開集合系の存立が開集合のそれに先立つ．つまり，「開集合系の要素が開集合」なのである．距離空間においては，その反対に，「開集合の集まりが開集合系」と定義されていた．なお，距離空間 (X, d) に対し，その開集合系を $\mathcal{O}_d$ とおくと，$(X, \mathcal{O}_d)$ は明らかに位相空間である．その意味で，距離空間は位相空間の一種である，といえる．この $\mathcal{O}_d$ を，**距離 d から定まる X の位相**という．

ここまで一般化が進むと，X 上には実に多くの位相が定まる．例えば，（一般には）距離化できない位相を定めることもできる．ここに，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が**距離化（距離付け）可能**であるとは，X 上のある距離 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が存在して $\mathcal{O} = \mathcal{O}_d$ となることをいう．

例 2.1.3. X を集合とする．

- $\mathcal{O}_* := \{\emptyset, X\}$ とおくと，これは X の位相である．$\mathcal{O}_*$ を，X の**密着位相**という．

- $\mathcal{O}^* := \mathcal{P}(X)$ とおくと，これは X の位相である．$\mathcal{O}^*$ を，X の**離散位相**という．
- $\mathcal{O}_{\mathrm{cof}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を，
$$\mathcal{O}_{\mathrm{cof}} := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ は有限集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$
で定義する．$\mathcal{O}_{\mathrm{cof}}$ は X の位相である．$\mathcal{O}_{\mathrm{cof}}$ を，X の**補有限位相**という．

離散位相は，例えば離散距離が定める位相である．一方，2 点以上の集合に対する密着位相は，距離化可能でない（確認は比較的易しい）．また，無限集合に対する補有限位相も距離化可能でない*3.

これで開集合系が定義されたので，続いて近傍系を定義できる．

定義 2.1.4. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$p \in X$，$N \subseteq X$ とする．

(1) N が p の X 上**開近傍**であるとは，$p \in N$ かつ $N \in \mathcal{O}$ であることをいう．

(2) N が p の X 上**近傍**であるとは，ある p の X 上開近傍 W が存在して $W \subseteq N$ であることをいう．
p の X 上近傍全体の集合を p の X 上の**近傍系**といい，$\mathcal{N}(p)$ で書き表す．各点の近傍系による族 $(\mathcal{N}(p))_{p \in X}$ を X の**近傍系**という．

近傍の定義において，距離空間では開球が p と N の間に挟まったが，位相空間では常には開球を用意できるとは限らないので，開集合が間に挟まっている．しかし，ここでも開近傍は近傍である．

またも距離空間のときとは異なり，今度は内点・外点・境界点の定義が後回しになっている．これらの概念は，位相空間においては，近傍を用いて定義される．

定義 2.1.5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$p \in X$，$A \subseteq X$ とする．

(1) p が A の X 上の**内点**であるとは，ある p の X 上近傍 N が存在して $N \subseteq A$ であることをいう．
A の X 上の内点全体の集合を A の X 上の**内部**といい，A^i で書き表す．

(2) p が A の X 上の**外点**であるとは，p が $X \setminus A$ の X 上の内点であることをいう．
A の X 上の外点全体の集合を A の X 上の**外部**といい，A^e で書き表す．

(3) p が A の X 上の**境界点**であるとは，p が A の X 上の内点でも外点でもないことをいう．
A の X 上の境界点全体の集合を A の X 上の**境界**といい，∂A で書き表す．

(4) A の X 上の**閉包** $\overline{A}$ を，$\overline{A} := A^i \cup \partial A$ で定義する．$\overline{A}$ は A^a で書き表すこともある．

やはり，$A \subseteq X$ に対し，$X = A^i \sqcup A^e \sqcup \partial A$ であり，$A^a = A^{ec} = A^{cic}$ である．

以降では，開集合系の性質が近傍系の性質を，近傍系の性質が開集合系の性質を，それぞれ導くことを見る．

2.2 開集合系から近傍系へ

まず，再び，開集合を近傍で特徴付ける．

補題 2.2.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$(\mathcal{N}(p))_{p \in X}$ を X の近傍系とし，$U \subseteq X$ とする．以下は同値である．

(a) $U \in \mathcal{O}$ である．

(b) 任意の $p \in U$ に対し $U \in \mathcal{N}(p)$ である．

*3 分離公理を学ぶと，簡単に証明できる（直接証明することもできると思う）．距離空間は T_2 と呼ばれる分離公理を満たすのだが，無限集合に対する補有限位相空間は T_2 を満たさない．本講では分離公理を扱わないので，この証明は本講の範囲では要求しない．

［証］ ((a)⇒(b)) 任意の $p \in U$ に対し，U は p の X 上開近傍であるから，特に X 上近傍である．

((b)⇒(a)) $p \in U$ を任意に取る．このとき，ある p の X 上開近傍 V が存在して，$V \subseteq U$ である．そこで，

$$V_p := \bigcup \{V \in \mathcal{O} \mid p \in V \land V \subseteq U\}$$

と定める[*4]．このとき，$V_p \in \mathcal{O}$ であり，更に $p \in V_p$ かつ $V_p \subseteq U$ である．従って，

$$\bigcup_{p \in U} V_p = U$$

であるから，$U \in \mathcal{O}$ である．（証終）

また，次の事実から，A^i が X の開集合，$\overline{A}$ が X の閉集合であることが従う．$A^{ii} = A^i$ と $A^{aa} = A^a$ は，ここから導かれる．

命題 2.2.2. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$(X, \mathcal{O})$ の閉集合系を $\mathcal{A}$ とし，$A \subseteq X$ とする．

$$A^i = \bigcup \{U \in \mathcal{O} \mid U \subseteq A\},$$
$$\overline{A} = \bigcap \{F \in \mathcal{A} \mid A \subseteq F\}$$

である．

［証］ A^i について示す．$V := \bigcup \{U \in \mathcal{O} \mid U \subseteq A\}$ とおく．

(⊆) $p \in A^i$ を任意に取る．このとき，特にある p の X 上開近傍 W が存在して $W \subseteq A$ を満たす．この W を一つ取る．W は族 $\{U \in \mathcal{O} \mid U \subseteq A\}$ の要素であるから，$W \subseteq V$ である．よって，$p \in V$ である．

(⊇) $p \in V$ を任意に取る．このとき，ある $U \in \mathcal{O}$ が存在して，$p \in U$ かつ $U \subseteq A$ を満たす．この U を一つ取る．すると，U は特に p の X 上近傍であるから，$p \in A^i$ である．

以上より，$A^i = V$ である．

$\overline{A}$ については，$\overline{A} = A^{cic}$ より，式変形から従う．（証終）

そのうえで，位相空間上で開集合系が定める近傍系が，距離空間のときと同様の性質をもつことを確かめよう．

一つ注意として，位相空間には $X = \emptyset$ の場合も含める．このとき，X の点に対する近傍系は定義されない．特に，集合 X の各点 $p \in X$ に対して X の部分集合族 $\mathcal{N}(p)$ を定める対応 $p \mapsto \mathcal{N}(p)$ を考えると，これは $X = \emptyset$ のとき空写像であるから，$(\mathcal{N}(p))_{p \in \emptyset} = \emptyset$ となる．なお，$X = \emptyset$ なるとき，任意の $p \in X$ に対しては（$p \in \emptyset$ が偽なので）あらゆる命題が成立するから，特に次の命題は明らかに成立する．

命題 2.2.3 (近傍系の公理)**.** $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$(\mathcal{N}(p))_{p \in X}$ を X の近傍系とする．このとき，任意の $p \in X$ に対し，次が成り立つ．

(N1) $\mathcal{N}(p) \neq \emptyset$ である．また，任意の $N \in \mathcal{N}(p)$ に対し $p \in N$ である．

(N2) 任意の $N_0, N_1 \in \mathcal{N}(p)$ に対し，$N_0 \cap N_1 \in \mathcal{N}(p)$ である．

[*4] 単に，このとき存在する p の X 上開近傍 V を $p \in X$ に対して一つずつ取り，以下同様の議論を行うには，厳密には選択公理を要する（と思う）．ここでは，そのような V を全部取ってくることで，選択公理の使用を確実に回避している．筆者は，論証に使う仮定は少ないに越したことはないと思っているので（*1 参照），そのように論証したのである．当然，選択公理を使って平易に論証してもよいだろう．~~選択公理ヤクザに絡まれなければいいのだが~~

(N3) 任意の $N \in \mathcal{N}(p)$ と任意の $M \subseteq X$ に対し，$N \subseteq M$ ならば $M \in \mathcal{N}(p)$ である．

(N4) 任意の $N \in \mathcal{N}(p)$ に対して，ある $M \in \mathcal{N}(p)$ が存在し，任意の $q \in M$ に対して，$N \in \mathcal{N}(q)$ が成り立つ．

［証］ $p \in X$ を任意に取る．

(N1) X は p の X 上開近傍であるから，$X \in \mathcal{N}(p)$，よって $\mathcal{N}(p) \neq \emptyset$ である．また，任意の $N \in \mathcal{N}(p)$ に対し，ある $W \in \mathcal{O}$ が存在して $p \in W$ かつ $W \subseteq N$ であるから，$p \in N$ である．

(N2) $N_0, N_1 \in \mathcal{N}(p)$ を任意に取る．このとき，ある p の X 上開近傍 W_0, W_1 が存在して $W_0 \subseteq N_0$ かつ $W_1 \subseteq N_1$ である．この W_0 と W_1 を一つずつ取る．$W := W_0 \cap W_1$ とおくと，$W \in \mathcal{O}$ であり，更に $p \in W$ かつ $W \subseteq N_0 \cap N_1$ である．よって，$N_0 \cap N_1 \in \mathcal{N}(p)$ である．

(N3) $N \in \mathcal{N}(p)$ を任意に取る．このとき，ある p の X 上開近傍が存在して $W \subseteq N$ である．この W を一つとる．このもとで，$M \subseteq X$ を $N \subseteq M$ を満たすよう任意に取る．すると，$W \subseteq M$ であるから，$M \in \mathcal{N}(p)$ である．

(N4) $N \in \mathcal{N}(p)$ を任意に取る．$M := N^i$ とおく．このとき，N が p の X 上近傍であることから，p は N の X 上の内点であるから，$p \in M$ である．また，$M \in \mathcal{O}$ であるから，$M \in \mathcal{N}(p)$ である．更に，任意の $q \in M$ に対し $M \in \mathcal{N}(q)$ である．よって，$M = N^i \subseteq N$ と (N3) より，任意の $q \in M$ に対し $N \in \mathcal{N}(q)$ である．（証終）

これで，開集合系から定まる近傍系が所望の性質を有することを確認できた．今度は，この逆を辿る．

2.3 近傍系から開集合系へ

補題 2.2.1 の観察を生かそう．

補題 2.3.1. X を集合とする．X の部分集合による空でない族の族 $(\mathcal{N}(p))_{p\in X}$ が，任意の $p \in X$ に対し，命題 2.2.3 の 4 条件のうち (N2) と (N3) を満たすと仮定する．このもとで，

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid \forall p \in U; U \in \mathcal{N}(p)\}$$

と定義する．$\mathcal{O}$ は X の位相である．

［証］ $X = \emptyset$ のときは，$\mathcal{O} = \{\emptyset\}$ であるから，$\mathcal{O}$ は X の位相である．以下，$X \neq \emptyset$ と仮定する．

(O1) 明らかに $\emptyset \in \mathcal{O}$ である．
続いて，$p \in X$ を任意に取る．このとき，$\mathcal{N}(p) \neq \emptyset$ であるから，$N \in \mathcal{N}(p)$ が存在する．この N を一つ取る．すると，$N \subseteq X$ であるから，(N3) より $X \in \mathcal{N}(p)$ である．よって，$X \in \mathcal{O}$ である．

(O2) $\mathcal{O}$ の部分族 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意に取る．$U := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とおく．$p \in U$ を任意に取る．このとき，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p \in U_\lambda$ である．この λ を一つ取る．すると，$U_\lambda \in \mathcal{N}(p)$ かつ $U_\lambda \subseteq U$ であるから，(N3) より $U \in \mathcal{N}(p)$ である．よって，$U \in \mathcal{O}$ である．

(O3) $U_0, U_1 \in \mathcal{O}$ を任意に取る．$p \in U_0 \cap U_1$ を任意に取る．このとき，$U_0, U_1 \in \mathcal{N}(p)$ であるから，(N2) より $U_0 \cap U_1 \in \mathcal{N}(p)$ である．よって，$U_0 \cap U_1 \in \mathcal{O}$ である．

以上より，$\mathcal{O}$ は X の位相である．（証終）

ここに，$\mathcal{N}(p)$ の非空性は，$X \neq \emptyset$ のときのために必要である．というのも，各 $p \in X$ に対して $\mathcal{N}(p) := \emptyset$ としてしまうと，$\mathcal{N}(p)$ は確かに (N2) と (N3) を満たすが，$\mathcal{O} = \{\emptyset\}$ となり，これは $X \neq \emptyset$ のときに X の位相とならない．

ところで，先ほどの証明では，近傍系の公理のうち僅か (N2) と (N3) の 2 つ（と (N1) の前半）を使うに留まっている．では (N1) と (N4) は不要だったのかというと，そうではない．これら 2 つの条件は，次節にちゃんと舞台が用意されている．

2.4　開集合系と近傍系の互換性

これまでやってきたことを，集合論的な言葉で言い直してみよう．少々厳密な話し振りをするので，後で砕けた表現もする．

X の部分集合族の族 $(\mathcal{N}(p))_{p\in X}$ とは，写像 $X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ のことで，これは $X \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ の特別な部分集合として基礎づけられることに注意せよ．

$$\begin{aligned}\mathscr{O} &:= \{\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \mid \mathcal{O} \text{ は (O1)-(O3) をすべて満たす }\},\\ \mathscr{N} &:= \{(\mathcal{N}(p))_{p\in X} \in \mathcal{P}(X \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) \mid \forall p \in X; \mathcal{N}(p) \text{ は (N1)-(N4) をすべて満たす }\}\end{aligned}$$

とおく．$\mathscr{O}$ は X の位相として可能なもの全体の集合，$\mathscr{N}$ は X の近傍系として可能なもの全体の集合である．このもとで，写像 $f\colon \mathscr{O} \to \mathscr{N}$，$g\colon \mathscr{N} \to \mathscr{O}$ を，$\mathcal{O} \in \mathscr{O}$ と $(\mathcal{N}(p))_{p\in X} \in \mathscr{N}$ に対し，それぞれ

$$\begin{aligned}f(\mathcal{O}) &:= (\{N \subseteq X \mid \exists W \in \mathcal{O}; (p \in W \land W \subseteq N)\})_{p\in X},\\ g\left((\mathcal{N}(p))_{p\in X}\right) &:= \{U \subseteq X \mid \forall p \in U; U \in \mathcal{N}(p)\}\end{aligned}$$

と定める．$f(\mathcal{O})$ は $(X, \mathcal{O})$ の近傍系に，$g\left((\mathcal{N}(p))_{p\in X}\right)$ は $(\mathcal{N}(p))_{p\in X}$ が導く X の位相に，それぞれ他ならない．我々は，2 節で f の，3 節で g の well-defined 性を，それぞれ確かめていたのである．

となると，今度は f と g の全射性と単射性が気になる．なんと喜ばしいことに，これらは共に全単射で，しかも互いに逆になる．つまり，$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{O}}$，$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathscr{N}}$ である．

砕けた表現をする: 直前の 2 節では，開集合系から近傍系を，近傍系から開集合系を，それぞれ定める方法を与え，これらが確かに機能することを確かめた．以降では，これらが可逆であること，即ち，開集合系と近傍系が対応物同士で一対一に対応すること，を確かめる．示すべきは，$g(f(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$ と $f\left(g\left((\mathcal{N}(p))_{p\in X}\right)\right) = (\mathcal{N}(p))_{p\in X}$ の二点である．

では，始めよう．

定理 2.4.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$(\mathcal{N}(p))_{p\in X}$ を $(X, \mathcal{O})$ の近傍系とする．このもとで，

$$\mathcal{O}_{\mathcal{N}} := \{U \subseteq X \mid \forall p \in U; U \in \mathcal{N}(p)\}$$

と定義する．このとき，$\mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ は X の位相で，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}$ である．

［証］　補題 2.2.1 からの帰結である．（証終）

定理 2.4.2. X を集合とする．X の部分集合族の族 $(\mathcal{N}(p))_{p\in X}$ が，任意の $p \in X$ に対し，命題 2.2.3 の 4 条件 (N1)-(N4) をすべて満たすとする．このもとで，

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid \forall p \in U; U \in \mathcal{N}(p)\}$$

と定める．$\mathcal{O}$ は X の位相である．また，$(X,\mathcal{O})$ の近傍系を $(\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(p))_{p\in X}$ とおくと，任意の $p\in X$ に対して $\mathcal{N}(p)=\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(p)$ が成り立つ．

［証］ 補題 2.3.1 より，$\mathcal{O}$ は X の位相である．$p\in X$ に対し，

$$\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(p)=\{N\subseteq X\mid \exists W\in\mathcal{O};(p\in W\wedge W\subseteq N)\}$$

である．

$p\in X$ を任意に取る．

（$\supseteq$）$N\in\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(p)$ を任意に取る．このとき，ある $W\in\mathcal{O}$ が存在して，$p\in W$ かつ $W\subseteq N$ を満たす．この W を一つ取る．すると，$W\in\mathcal{N}(p)$ であるから，(N3) より，$N\in\mathcal{N}(p)$ である．つまり，$\mathcal{N}(p)\supseteq\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(p)$ である．

（$\subseteq$）$N\in\mathcal{N}(p)$ を任意に取る．

$$W:=\{q\in X\mid N\in\mathcal{N}(q)\}$$

とおく．$N\in\mathcal{N}(p)$ であるから，$p\in W$ である．また，(N1) より，任意の $q\in W$ に対し $q\in N$ であるから，$W\subseteq N$ である．以下，$W\in\mathcal{O}$ を示す．

$q\in W$ を任意に取る．このとき，$N\in\mathcal{N}(q)$ である．よって，(N4) より，ある $M\in\mathcal{N}(q)$ が存在して，任意の $r\in M$ に対して $N\in\mathcal{N}(r)$ である．この M を一つ取る．W の定義より $M\subseteq W$ であるから，(N3) より $W\in\mathcal{N}(q)$ である．よって，$W\in\mathcal{O}$ である．

従って，$N\in\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(p)$，即ち $\mathcal{N}(p)\subseteq\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(p)$ である．

以上より，任意の $p\in X$ に対して $\mathcal{N}(p)=\mathcal{N}_{\mathcal{O}}(p)$ である． （証終）

以上で，開集合系と近傍系の対応物を互いに同一視できることが確かめられた．当初これら二者は，（開集合系と閉集合系の対応に比すればより顕著に）まるで似ても似つかぬもの同士であるかに思われたが，実は同一の構造を指し示す側面同士の関係にあったことが，これで諒解されただろう．以降我々は，同じ位相空間を扱っているとの確証のもとで，開集合系と近傍系を行き来できる．

さて，これまで一般論ばかり展開してきたことで，頭が痺れてきた読者もいるかもしれない．次章では，新鮮な空気を吸いながら，位相空間の具体的な使用例を見ていくことにする．目標は，次の定理である．

定理 (最大値最小値定理)**.** $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間，$I:=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ を閉区間とし，$f\colon I\to\mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき，像 $f[I]\subseteq\mathbb{R}$ は最大値と最小値をもつ．

3 使用例: 最大値最小値定理

3.1 写像の連続性

まず，$I\subseteq\mathbb{R}$ における実数値関数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ が連続であることを，位相空間の言葉を使って語れなければ，話が始まらない．解析学では，関数 $f\colon I\to\mathbb{R}$ が $x\in I$ で連続であることは，

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0};\exists\delta\in\mathbb{R}_{>0};\forall y\in X;(|x-y|<\delta\to|f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

が成り立つことと定義されていた．これは，距離空間を渡る写像 $f\colon(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ においても同様である．

定義 3.1.1. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間，$f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ を写像とし，$x \in X$ とする．f が x で**連続**であるとは，

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}; \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0}; \forall y \in X; (d_X(x, y) < \delta \to d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

が成り立つことをいう．f が X の各点で連続であるとき，f は（単に）**連続**であるという．

ここで，$x, y \in X$ とすると，任意の $r \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，$d_X(x, y) < r$ と $y \in B_{d_X}(x; r)$ は同値である．このことから，$d_X(x, y) < r$ の形は，内点や近傍に関する話へ連携していくことが示唆される．実際，次のことが成り立つ．なお，この同値性は，証明中では断りなく用いている．

補題 3.1.2. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間，$f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ を写像とし，$x \in X$ とする．このとき，以下は同値である．

(a) f は x で連続である．
(b) 任意の $f(x)$ の Y 上近傍 N に対し，$f^{-1}[N]$ は x の X 上近傍である．

［証］ 距離空間 (Z, d_Z) に対し，中心 $p \in Z$，半径 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ の Z 上開球を $B_Z(p; r)$ と略記する．

((a)⇒(b)) (a) を仮定する．そのうえで，$f(x)$ の Y 上近傍 N を任意に取る．このとき，ある $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，$B_Y(f(x); \varepsilon) \subseteq N$ である．この ε を一つ取る．すると，(a) より，ある $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，任意の $y \in B_X(x; \delta)$ に対して $f(y) \in B_Y(f(x); \varepsilon)$ となる．この δ を一つ取る．このとき，特に $f[B_X(x; \delta)] \subseteq N$ であるから，$B_X(x; \delta) \subseteq f^{-1}[N]$ である．よって，x は $f^{-1}[N]$ の X 上内点であるから，(b) が成立する．

((b)⇒(a)) (b) を仮定する．そのうえで，$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る．このとき，$B_Y(f(x); \varepsilon)$ は $f(x)$ の Y 上近傍であるから，(b) より，$f^{-1}[B_Y(f(x); \varepsilon)]$ は x の X 上近傍である．よって，ある $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して，$B_X(x; \delta) \subseteq f^{-1}[B_Y(f(x); \varepsilon)]$ を満たす．この δ を一つ取る．すると，$f[B_X(x; \delta)] \subseteq B_Y(f(x); \varepsilon)$ であるので，任意の $y \in B_X(x; \delta)$ に対し $f(y) \in B_Y(f(x); \varepsilon)$ となるから，(a) が成立する． （証終）

この事実を逆手に取り，位相空間を渡る写像の連続性を，次で定義する．

定義 3.1.3. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を写像とし，$x \in X$ とする．f が x で**連続**であるとは，任意の $f(x)$ の Y 上近傍 N に対し，$f^{-1}[N]$ が x の X 上近傍であることをいう．f が X の各点で連続であるとき，f は（単に）**連続**であるという．

$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が各点 $x \in X$ で連続であることは，もっと簡単な言い換えがある．

補題 3.1.4. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を写像とする．このとき，以下は同値である．

(a)（定義 3.1.3 の意味で）f は連続である．
(b) 任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ に対し，$f^{-1}[U] \in \mathcal{O}_X$ である．
(c) 任意の Y の閉集合 F に対し，$f^{-1}[F]$ は X の閉集合である．

［証］ (b) と (c) の同値性はすぐ分かる．

((a)⇒(b)) (a) を仮定する．そのうえで，$U \in \mathcal{O}_Y$ を任意に取る．$x \in f^{-1}[U]$ を任意に取る．このとき，$f(x) \in U$ である．よって，U は特に $f(x)$ の Y 上近傍であるから，$f^{-1}[U]$ は x の X 上近傍である．従って，$f^{-1}[U] \in \mathcal{O}_X$ である．

((b)⇒(a)) (b) を仮定する．そのうえで，$x \in X$ を任意に取る．$f(x)$ の Y 上近傍 N を任意に取る．このとき，ある $f(x)$ の Y 上開近傍 W が存在して，$W \subseteq N$ である．この W を一つ取る．仮定より，$f^{-1}[W] \in \mathcal{O}_X$ であり，かつ $x \in f^{-1}[W]$ である．よって，$f^{-1}[W]$ は x の X 上開近傍である．ここで，$f^{-1}[W] \subseteq f^{-1}[N]$ であるから，$f^{-1}[N]$ は x の X 上近傍である．以上より，任意の $x \in X$ で f は連続である．（証終）

これで，例えば次のことをいとも簡単に証明できる．

例題 3.1.5. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y), (Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間，$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$，$g\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ を連続写像とする．このとき，$g \circ f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ も連続写像である．

3.2 コンパクト集合

次に，部分集合 $I \subseteq \mathbb{R}$ に入る位相を考えられるようになるため，相対位相の概念を導入する．

定義 3.2.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，$A \subseteq X$ とする．$\mathcal{O}_A \subseteq \mathcal{P}(A)$ を，

$$\mathcal{O}_A := \{U \subseteq A \mid \exists V \in \mathcal{O}_X; U = V \cap A\}$$

で定義する．この $\mathcal{O}_A$ は A の位相である．$\mathcal{O}_A$ を A の $\mathcal{O}_X$ からの**相対位相**という．$(A, \mathcal{O}_A)$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ の**部分空間**という．

ここで，一つ重大な注意がある．X の開集合 U は，$U \subseteq A$ が常に成立するとは限らないので，A の開集合とは限らない，というのはよい．問題は，A の開集合 V が X の開集合であるとも限らないことである．

最も簡単な例を取ろう．$\mathbb{R}$ にユークリッド距離から定まる位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ を入れ，位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$ と見なす．$I := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ とおき，I に $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ からの相対位相 $\mathcal{O}_I$ を入れ，部分空間 $(I, \mathcal{O}_I)$ を作る．このとき，I は明らかに I の開集合であるが，$\mathbb{R}$ の開集合ではない．他にも，例えば $\left[0, \dfrac{1}{2}\right) \subseteq I$ は，I の開集合であるが，$\mathbb{R}$ の開集合ではない（それぞれ確認せよ）．

そういうわけなので，一般に，ある集合が開集合であるかどうかは，空間に入る位相が承知されていてなお，全体集合の取り方にも依存する．そのために，単に “A は開集合である” などとはせず，全体集合を明示してきた．これは，近傍，内点，外点，境界点などの位相的な概念についても同様である[*5]．

これを踏まえて，コンパクト性と呼ばれる位相空間の性質を見ていく．

定義 3.2.2. [*6]$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$A \subseteq X$ とする．

(1) X の部分集合族 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が A の**被覆**であるとは，$A \subseteq \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ であることをいう．

[*5] 当然，位相が違えば開集合かどうかも変わりうるので，厳密には，「A は $(X, \mathcal{O})$ の開集合である」とか，「A の $(X, \mathcal{O})$ 上の内部を $\mathrm{Int}_{(X, \mathcal{O})} A$ とおく」などとしなければならない．「A は X の開集合である」などと位相の明記を省略していたのは，X に入れる特定の位相を暗黙のうちに合意していたからである．また「A の X 上の内部を A^i とおく」などと記号の設定で全体集合の明記すら省略したのは，ぶっちゃけて言えば，慣習に他ならない．なお，論証に関わらない部分についてまで拘泥するものではない．

[*6] 参考文献の 2 冊 [1, 2] において，この被覆の概念を，[1] では添字なしの部分集合族 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対して，[2] では添字つきの部分集合族 $\mathcal{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，それぞれ定義している．選択公理のもとではこれら添字の有無はほとんど差を生じず，特に添字つきの集合族に対する（コンパクト性をはじめとした）諸性質は添字なしの集合族に対する対応性質を選択公理なしで導ける [3]．そこで，ここでは添字つきの部分集合族に対して被覆の概念を定義する．なお，なるべく添字なしの被覆を引き合いに出さないようにする．

(2) $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の被覆とする．$\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ が $A \subseteq \bigcup_{\mu\in\Lambda_0} U_\mu$ を満たすとき，部分族 $(U_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ を $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の**部分被覆**という．特に Λ_0 が有限集合であるときは，$(U_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ を $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の**有限部分被覆**という．

(3) A の被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が $\mathcal{O}$ の部分族であるとき，$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を A の X 上**開被覆**という．

定義 3.2.3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$A \subseteq X$ とする．A の任意の X 上開被覆が有限部分被覆をもつとき，A を X の**コンパクト集合**という．特に $A = X$ であるときは，X を**コンパクト空間**という．

ある集合がコンパクトであるかどうかは，空間に入る位相が固定されれば，全体集合の取り方に依らず確定する．これは，開集合や近傍などの概念とは一線を画する性質である．これを以て，$A \subseteq X$ が X のコンパクト集合であることを，（単に）A はコンパクトである，などと言うことがある．

命題 3.2.4. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし，$A \subseteq X$ とする．このとき，以下は同値である．

(a) $(A, \mathcal{O}_A)$ はコンパクト空間である．ここに，$\mathcal{O}_A$ は A の $\mathcal{O}_X$ からの相対位相である．

(b) A は X のコンパクト集合である．

［証］ ((a)⇒(b)) (a) を仮定する．A の X 上開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意に取る．このとき，$\lambda \in \Lambda$ に対し $V_\lambda := U_\lambda \cap A$ とおくと，$(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は A の A 上開被覆となる．よって，(a) より，ある有限部分集合 $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ が存在して，$(V_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ が $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆となる．この Λ_0 を一つ取る．すると，$(U_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆である．よって，(b) を導けた．

((b)⇒(a)) (b) を仮定する．A の A 上開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意に取る．このもとで，$\lambda \in \Lambda$ を任意に取る．このとき，ある $V \in \mathcal{O}_X$ が存在して $U_\lambda = V \cap A$ となる．そこで，

$$V_\lambda := \bigcup \{V \in \mathcal{O}_X \mid U_\lambda = V \cap A\}$$

と定める．すると，$V_\lambda \in \mathcal{O}_X$ かつ $U_\lambda = V_\lambda \cap A$ である．よって，$(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は A の X 上開被覆となる．よって，(b) より，ある有限部分集合 $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ が存在して，$(V_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ が $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆となる．この Λ_0 を一つ取る．すると，$(U_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆である．よって，(a) を導けた．（証終）

$A \subseteq X$ がコンパクトでないことは，有限部分被覆をもたないような A の X 上の無限開被覆を構成することで示される．そのため，A がコンパクトであることを確認するのは，A がコンパクトでないことを確認するよりも難しいことが多い．コンパクトであるかどうかの判定はもっと難しい．

例 3.2.5. （定義から直接証明せよ）

- 有限位相空間はコンパクトである．
- 密着位相空間はコンパクトである．
- 有限離散位相空間はコンパクトである．無限離散位相空間はコンパクトでない．
- $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を，通常のユークリッド距離による n 次元ユークリッド空間とする．$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ のコンパクト集合は有界である．よって，対偶として，$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ の非有界部分集合はコンパクトでない．特に，$\mathbb{R}^n$ はコンパクトでない．

しかし，もともとコンパクトな空間が与えられていれば，そこから別の空間のコンパクト性を導けることがある．

補題 3.2.6. $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト位相空間とする．$A \subseteq X$ が X の閉集合ならば，A は X のコンパクト集合である．

［証］ A の X 上開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意に取る．$\Lambda \notin \Lambda$ に注意せよ．そのうえで $U_\Lambda := X \setminus A$ とおくと，U_Λ は X の開集合であるから，$\Lambda' := \Lambda \cup \{\Lambda\}$ とおくと，$(U_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ は X の X 上開被覆である．よって，X のコンパクト性から，ある有限部分集合 $\Lambda'_0 \subseteq \Lambda'$ が存在して，$(U_{\mu'})_{\mu'\in\Lambda'_0}$ が $(U_{\lambda'})_{\lambda'\in\Lambda'}$ の有限部分被覆となる．この Λ'_0 を一つ取る．ここで，$\Lambda_0 := \Lambda'_0 \setminus \{\Lambda\}$ とおく．すると，$U_\Lambda = X \setminus A$ であったから，$(U_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ は A の X 上開被覆でなければならない．よって，$(U_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆となる．従って，A は X のコンパクト集合である． （証終）

補題 3.2.7. $(X, \mathcal{O}_X)$ をコンパクト位相空間，$(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とする．このとき，像 $f[X]$ は Y のコンパクト集合である．

［証］ $f[X]$ の Y 上開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意に取る．このとき, $\lambda \in \Lambda$ に対し $V_\lambda := f^{-1}[U_\lambda]$ とおくと, $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は X の X 上開被覆である．よって，ある有限部分集合 $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ が存在して，$(V_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ が $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆となる．この Λ_0 を一つ取る．すると，$(U_\mu)_{\mu\in\Lambda_0}$ は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆である．従って，$f[X]$ は Y のコンパクト集合である． （証終）

3.3 Heine-Borel の被覆定理

本章の背骨である定理を証明しよう．これが終わると，最大値最小値定理まではすぐである．

定理 3.3.1 (Heine-Borel の被覆定理)**.** $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする．閉区間 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．

［証］ $a = b$ のときは $[a, b] = [a, a] = \{a\}$ であるから，明らかに $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．以下，$a < b$ とする．

背理法で示す．有限部分被覆をもたないような $[a, b]$ の $\mathbb{R}$ 上開被覆が存在すると仮定する．そのうえで矛盾を導く．仮定の開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を一つ取る．$\mathbb{R}$ の閉区間の列 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を以下で帰納的に定義する:

- $I_0 := [a, b]$ とする．I_0 は $\mathbb{R}$ の閉区間であり，背理法の仮定より，I_0 は $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のいかなる有限部分族によっても被覆されない．
- I_n が定義されており，I_n は $\mathbb{R}$ の閉区間であり，かつ $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のいかなる有限部分族によっても被覆されない，と仮定する．まず，$I_n = [a_n, b_n]$ を満たす $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ が一意的に存在する．この a_n と b_n を取る．このもとで，
$$I_{n+1}^{(0)} := \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right],\ I_{n+1}^{(1)} := \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$$
とおく．すると，$I_{n+1}^{(0)} \cup I_{n+1}^{(1)} = I_n$ であるから，帰納法の仮定より，$I_{n+1}^{(0)}$ と $I_{n+1}^{(1)}$ うち少なくとも一方は，$(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のいかなる有限部分族によっても被覆されない．そこで，
  - ▶ $I_{n+1}^{(0)}$ が $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のいかなる有限部分族によっても被覆されないとき，$I_{n+1} := I_{n+1}^{(0)}$，
  - ▶ $I_{n+1}^{(0)}$ が $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のある有限部分族によって被覆されるとき，$I_{n+1} := I_{n+1}^{(1)}$

  で，I_{n+1} を定義する．I_{n+1} は $\mathbb{R}$ の閉区間であり，かつ $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ のいかなる有限部分族によっても被覆されない．

こうして定義された $\mathbb{R}$ の閉区間の列 $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し「$I_n \neq \emptyset$ かつ $I_{n+1} \subseteq I_n$」であり，かつ $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$ を満たす．よって，区間縮小法により，ある $p \in \mathbb{R}$ が一意的に存在して

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{p\}$$

を満たす．この p を取る．このとき，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p \in U_\lambda$ である．この λ を一つ取る．すると，更にある $r \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $B_{\mathbb{R}}(p; r) = (p - r, p + r) \subseteq U_\lambda$ を満たす．この r を一つ取る．ここで，閉区間 I_n の長さは $|I_n| = 2^{-n}(b - a) > 0$ であった．よって，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $r > |I_N|$ を満たす．この N を一つ取る．すると，閉区間 I_N は U_λ のみによって被覆される．つまり，I_N を被覆する $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分族が存在する．これは $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の構成に矛盾する．

以上より，$[a, b]$ の任意の $\mathbb{R}$ 上開被覆 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は有限部分被覆をもつ．従って，$[a, b]$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．（証終）

これにより，次のことが示される．

補題 3.3.2. $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ を 1 次元ユークリッド空間とし，$A \subseteq \mathbb{R}$ とする．以下は同値である．

(a) A は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．
(b) A は $\mathbb{R}$ の有界閉集合である．

［証］ ここが一番おいしい．証明は読者に譲る．ヒント[*7]．（証終）

これで証明を行える．

系 3.3.3 (最大値最小値定理)**.** $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間，$I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ を閉区間とし，$f\colon I \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．このとき，像 $f[I] \subseteq \mathbb{R}$ は最大値と最小値をもつ．

［証］ I は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合であるから，$f[I]$ も $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．よって，$f[I]$ は有界閉集合である．よって，$f[I] \neq \emptyset$ と併せて，$f[I]$ の上限 $\sup f[I]$ と下限 $\inf f[I]$ は，実数値として存在する．

$s := \sup f[I]$ とおく．$\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ を任意に取る．このとき，s が $f[I]$ の上限であることから，任意の $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し，ある $x \in f[I]$ が存在して，$|s - x| < \varepsilon$ を満たす．一方，任意の $x \in f[I]$ に対し $s - x \geq 0$ であるから，$s + \frac{\varepsilon}{2} \notin f[I]$ である．以上より，

$$B_{\mathbb{R}}(s; \varepsilon) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus f[I] \text{ かつ } B_{\mathbb{R}}(s; \varepsilon) \not\subseteq f[I]$$

が成り立つ．これは，s が $f[I]$ の $\mathbb{R}$ 上境界点，特に $\mathbb{R}$ 上閉包 $\overline{f[I]}$ の点であることを意味する．よって，$f[I]$ が $\mathbb{R}$ の閉集合であることと併せて，$s \in f[I]$ である．同様に，$\inf f[I] \in f[I]$ も成立する．

従って，$f[I]$ は，$\sup f[I]$ を最大値に，$\inf f[I]$ を最小値に，それぞれもつ．（証終）

[*7] とはいえ（特に初学者には）難しいので，ヒントを載せておく．
(a)⇒(b)．$X \setminus A$ の任意の点が A の $\mathbb{R}$ 上外点であることを示そう．任意の $p \in X \setminus A$ と任意の $q \in A$ に対し，ある $r_q \in \mathbb{R}_{>0}$ を具体的に取り，$B_{\mathbb{R}}(p; r_q) \cap B_{\mathbb{R}}(q; r_q) = \emptyset$ とできる．開球の族 $(B_{\mathbb{R}}(q; r_q))_{q\in A}$ は A の $\mathbb{R}$ 上開被覆であるから，A のコンパクト性より有限部分被覆を取れて……
(b)⇒(a)．A は有界であるから，ある $M \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在して $A \subseteq [-M, M]$ である．この $[-M, M] \subseteq \mathbb{R}$ はコンパクト集合である．そこで，$[-M, M]$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相を入れると，A は $[-M, M]$ の……

特に，これは I を一般の空でないコンパクト空間に読み替えても当然成立する．つまり，$(X,\mathcal{O})$ を空でないコンパクト位相空間，$f\colon (X,\mathcal{O}) \to \mathbb{R}$ を連続写像とすると，像 $f[X] \subseteq \mathbb{R}$ はやはり最大値と最小値をもつ．

これが，位相空間の使用例の一つである．ここに至るまでの道は少し長かったけれども，その代わりに，他所でも充分実用にたえる命題や補題を副産物としてたくさん得られたし，なにより，重要な具体的主張をより一般的な定理の系として導く，表現するなら「一般論で殴る」快感を，少なからず共有できたものと信じる．

4 基本近傍系と開基

4.1 基本近傍系

話は変わるが，（点の）近傍系は要素を些か多く含みすぎている．例えば，$(\mathbb{R},\mathcal{O}_\mathbb{R})$ を 1 次元ユークリッド空間とし，$0 \in \mathbb{R}$ を取る．このとき，$N_0 := B_\mathbb{R}(0;1)$ は当然 0 の $\mathbb{R}$ 上近傍であり，よって $N_1 := N_0 \cup \{2^{60}\}$ も 0 の $\mathbb{R}$ 上近傍である．だが，$\mathbb{R}$ の部分集合が 0 の近傍であるかどうかは，それこそ 0 の近くの状況さえ判明すればよく，N_1 が 0 の $\mathbb{R}$ 上近傍であることに $2^{60} \in N_1$ が寄与しているとは到底思えない．これでは実用するのが大変なので，（点の）近傍系の要素を少し間引き，整理したい．

定義 4.1.1. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間，$p \in X$ とし，p の X 上の近傍系を $\mathcal{N}(p)$ とおく．部分族 $\mathcal{U}(p) \subseteq \mathcal{N}(p)$ が p の X 上の**基本近傍系**であるとは，任意の $N \in \mathcal{N}(p)$ に対し，ある $M \in \mathcal{U}(p)$ が存在して，$M \subseteq N$ を満たすことをいう．各点の基本近傍系による族 $(\mathcal{U}(p))_{p\in X}$ を X の**基本近傍系**という．

例えば，$p \in X$ の X 上開近傍全体の集合は，p の X 上の基本近傍系となる．また，p の X 上の近傍系は明らかに p の X 上の基本近傍系である．

例 4.1.2. (X,d) を距離空間とする．$p \in X$ に対し，

$$\mathcal{U}_d(p) := \{B_d(p;2^{-n}) \subseteq X \mid n \in \mathbb{N}\}$$

と定める．$(\mathcal{U}_d(p))_{p\in X}$ は X の基本近傍系である．また，任意の $p \in X$ に対し，$\mathcal{U}_d(p)$ は高々可算である．

基本近傍系は，次の性質を満たす．命題 2.2.3 の 4 条件 (N1)-(N4) と比較せよ．

命題 4.1.3 (基本近傍系の公理)**.** $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし，$(\mathcal{U}(p))_{p\in X}$ を X の基本近傍系とする．このとき，任意の $p \in X$ に対して，次が成り立つ．

(NB1) $\mathcal{U}(p) \neq \emptyset$ である．また，任意の $N \in \mathcal{U}(p)$ に対し $p \in N$ である．

(NB2) 任意の $N_0, N_1 \in \mathcal{U}(p)$ に対し，ある $M \in \mathcal{U}(p)$ が存在して，$M \subseteq N_0 \cap N_1$ を満たす．

(NB3) 任意の $N \in \mathcal{U}(p)$ に対し，ある $M \in \mathcal{U}(p)$ が存在して，任意の $q \in M$ に対し，ある $N_q \in \mathcal{U}(q)$ が存在し，$N_q \subseteq N$ を満たす．

［証］ X の近傍系を $(\mathcal{N}(p))_{p\in X}$ とおく．$p \in X$ を任意に取る．

(NB1) (N1) より，ある $N \in \mathcal{N}(p)$ が存在する．この N を一つ取る．すると，ある $M \in \mathcal{U}(p)$ が存在して $M \subseteq N$ である．よって，$\mathcal{U}(p) \neq \emptyset$ である．また，任意の $N \in \mathcal{N}(p)$ に対し $p \in N$ であるから，$\mathcal{U}(p) \subseteq \mathcal{N}(p)$ より，特に任意の $N \in \mathcal{U}(p)$ に対し $p \in N$ である．

(NB2) $N_0, N_1 \in \mathcal{U}(p)$ を任意に取る．このとき，(N2) より $N_0 \cap N_1 \in \mathcal{N}(p)$ であるから，ある $M \in \mathcal{U}(p)$ が存在して $M \subseteq N_0 \cap N_1$ を満たす．

(NB3) $N \in \mathcal{U}(p)$ を任意に取る．このとき，(N4) より，ある $M_0 \in \mathcal{N}(p)$ が存在して，「任意の $q \in M_0$ に対し $N \in \mathcal{N}(q)$」を満たす．この M_0 を一つ取る．すると，ある $M \in \mathcal{U}(p)$ が存在して $M \subseteq M_0$ を満たす．この M を一つ取る．このもとで，$q \in M$ を任意にとる．このとき，M_0 の取り方から特に $N \in \mathcal{N}(q)$ であるから，ある $N_q \in \mathcal{U}(q)$ が存在して $N_q \subseteq N$ である． （証終）

見てのとおり，(N3) が完全に姿を消している．これは，（点の）近傍系が要素を含みすぎた原因の一つが (N3) の存在であった，ということである．ある読者は，基本近傍系の定義自体が (N3) に似通っていることを指摘するだろう．その反対に，(N1)，(N2)，(N4) の 3 条件は，後者 2 つが少し形を変えているものの，基本近傍系においても残存している．変形を余儀なくされたのは，(N2) と (N4) で存在した近傍が基本近傍系にもそのまま現れるとは限らないからである．そこで，基本近傍系に属する，より小さな近傍を取り直すことで，もとの条件を都合よく修正した．これら 3 条件 (NB1)-(NB3) は，ただ徒に設定されたのではなく，むしろ近傍系の公理 (N1)-(N4) からの自然な展開として現れたのである．

さて，こうまでして作った基本近傍系が，近傍系よりも却って世話の焼ける構造であってはならない．もしそうであれば，我々はこれを "基本" 近傍系と名付ける動機を全く失ってしまう．

補題 4.1.4. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$(\mathcal{U}(p))_{p \in X}$ を X の基本近傍系とし，$U \subseteq X$ とする．以下は同値である．

(a) $U \in \mathcal{O}$ である．
(b) 任意の $p \in U$ に対して，ある $N \in \mathcal{U}(p)$ が存在し，$N \subseteq U$ である．

［証］ (b) は「任意の $p \in U$ に対して $U \in \mathcal{N}(p)$」と同値であるから，補題 2.2.1 より同値性が従う． （証終）

この事実は，例 4.1.2 と併せると，距離空間における開集合の定義に他ならない．

もうひとつ，開集合系と近傍系が互換的であったことを思うと，開集合系と基本近傍系もまた互換的であってほしい．これは，実際に成り立つ（が，基本近傍系は同じ位相に対して何個も取れてしまうので，一対一に対応するとまではいえない）．方針は，近傍系に関して採ったものと同じである．

定理 4.1.5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$(\mathcal{U}(p))_{p \in X}$ を X の基本近傍系とする．

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}} := \{U \subseteq X \mid \forall p \in U; \exists N \in \mathcal{U}(p); N \subseteq U\}$$

と定める．このとき，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ である．特に，$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ は X の位相である．

［証］ 補題 4.1.4 からの帰結である． （証終）

定理 4.1.6. X を集合とする．X の部分集合族の族 $(\mathcal{U}(p))_{p \in X}$ が，命題 4.1.3 の 3 条件 (NB1)-(NB3) をすべて満たすとする．このもとで，

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid \forall p \in U; \exists N \in \mathcal{U}(p); N \subseteq U\}$$

と定める．このとき，$\mathcal{O}$ は X の位相となり，$(\mathcal{U}(p))_{p \in X}$ は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の基本近傍系となる．

［証］ はじめに，$\mathcal{O}$ が X の位相であることを示す．

(O1) 明らかに $\emptyset \in \mathcal{O}$ である．また，$p \in X$ を任意に取ると，(NB1) より $\mathcal{U}(p) \neq \emptyset$ であるから $U \in \mathcal{U}(p)$ を一つ取れ，これは $U \subseteq X$ を満たす．よって，$X \in \mathcal{O}$ である．

(O2) $\mathcal{O}$ の部分族 $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意に取る．$p \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を任意に取る．このとき，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p \in U_\lambda$ を満たす．この λ を一つ取る．すると，ある $N \in \mathcal{U}(p)$ が存在して $N \subseteq U_\lambda$ を満たす．この N を一つ取る．このとき，$N \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ である．よって，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である．

(O3) $U_0, U_1 \in \mathcal{O}$ を任意に取る．このとき，ある $N_0, N_1 \in \mathcal{U}(p)$ が存在して，$N_0 \subseteq U_0$ かつ $N_1 \subseteq U_1$ を満たす．この N_0 と N_1 を一つずつ取る．このとき，(NB2) より，ある $M \in \mathcal{U}(p)$ が存在して，$M \subseteq N_0 \cap N_1$ である．この M を一つ取る．すると，$M \subseteq U_0 \cap U_1$ である．よって，$U_0 \cap U_1 \in \mathcal{O}$ である．

$(X, \mathcal{O})$ の近傍系を $(\mathcal{N}(p))_{p\in X}$ とおく．$p \in X$ に対し，

$$\mathcal{N}(p) := \{N \subseteq X \mid \exists W \in \mathcal{O}; (p \in W \land W \subseteq N)\}$$

である．以下，通して $p \in X$ を任意に取る．

まず，$\mathcal{U}(p) \subseteq \mathcal{N}(p)$ を示す．$N \in \mathcal{U}(p)$ を任意に取る．$W \subseteq N$ を，

$$W := \{q \in N \mid \exists M \in \mathcal{U}(q); M \subseteq N\}$$

で定義する．即座に $p \in W$ である．以下，$W \in \mathcal{O}$ を示す．$q \in W$ を任意に取る．このとき，W の定義より，ある $M \in \mathcal{U}(q)$ が存在して $M \subseteq N$ である．この M を一つ取る．すると，(NB3) より，ある $M_0 \in \mathcal{U}(q)$ が存在して，「任意の $r \in M_0$ に対し，ある $N_r \in \mathcal{U}(r)$ が存在して $N_r \subseteq M$」を満たす．この M_0 を一つ取る．このとき，任意の $r \in M_0$ に対し，ある $N_r \in \mathcal{U}(r)$ が存在して特に $N_r \subseteq N$ を満たすから，$r \in W$ である．つまり，$M_0 \subseteq W$ である．以上より，$W \in \mathcal{O}$ である．従って，$N \in \mathcal{N}(p)$ である．

最後に，$\mathcal{U}(p)$ が $\mathcal{N}(p)$ の基本近傍系であることを示す．$N \in \mathcal{N}(p)$ を任意に取る．このとき，ある $W \in \mathcal{O}$ が存在して，$p \in W$ かつ $W \subseteq N$ を満たす．この W を一つ取る．すると，$\mathcal{O}$ の定義より，ある $M \in \mathcal{U}(p)$ が存在して $M \subseteq W$ を満たす．この M を一つ取る．この M は，$M \subseteq N$ を満たす．従って，$(\mathcal{U}(p))_{p\in X}$ は $(X, \mathcal{O})$ の基本近傍系である． （証終）

基本近傍系を使う手近な例も，一つ挙げておこう．

例題 4.1.7. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$(\mathcal{N}_X(p))_{p\in X}$ を X の近傍系，$(\mathcal{U}_Y(p))_{p\in X}$ を Y の基本近傍系とし，$f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を写像とする．任意の $p \in X$ に対し，以下は同値である．

(a)（定義 3.1.3 の意味で）f は p で連続である．

(b) 任意の $N \in \mathcal{U}_Y(f(p))$ に対し，$f^{-1}[N] \in \mathcal{N}_X(p)$ である．

4.2　位相の生成と開基

同じ理由で，開集合の要素も間引けると，手間が省けて大変よろしい．こちらも，もとの位相を再現できるように開集合系を小さく整理できる．が，あまり小さくすると却って手間になる場合がある．

一般に，次のようにすると，X の部分集合族 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し，$\mathcal{S}$ を包含するような最も弱い X の位相 $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ を作れる．ただし，X の部分集合族 $\mathcal{F}$ に対し，

$$\bigcup \mathcal{F} := \{x \in X \mid \exists F \in \mathcal{F}; x \in F\},$$
$$\bigcap \mathcal{F} := \{x \in X \mid \forall F \in \mathcal{F}; x \in F\}$$

と略記する．特に，空な部分集合族 $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(X)$ に対し，$\bigcup \emptyset = \emptyset$，$\bigcap \emptyset = X$ である．

命題 4.2.1. X を集合，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を X の部分集合族とする．$\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ を，

$$\mathcal{S}_0 := \left\{ \bigcap \mathcal{T} \subseteq X \,\middle|\, \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S} \wedge \mathcal{T} \text{ は有限集合} \right\},$$
$$\mathcal{O}_{\mathcal{S}} := \left\{ \bigcup \mathcal{T} \subseteq X \,\middle|\, \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}_0 \right\}$$

で定義する．$\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ は X の位相であり，しかも $\mathcal{S}$ を包含する X の位相として最弱である．

［証］ $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ が X の位相であることは各自で確かめよ．

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_0$ かつ $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ であるから，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ である．

X の位相 $\mathcal{O}$ を，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ を満たすよう任意に取る．$\mathcal{O}$ は X の位相であるから，(O3) より $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{O}$ である．また，(O2) より $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{O}$ である．従って，$\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ は，$\mathcal{S}$ を包含する X の位相として最弱である． （証終）

定義 4.2.2. (1) X を集合，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とする．$\mathcal{S}$ を包含する X の最弱の位相を，$\mathcal{S}$ が**生成する位相**という．
(2) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**準開基**であるとは，$\mathcal{S}$ が生成する位相と $\mathcal{O}$ が一致することをいう．

とりあえず，位相 $\mathcal{O}$ を準開基 $\mathcal{S}$ まで小さくできた．しかし，単に小さくするのも考えものである．何か特別の必要があって $\mathcal{S}$ から位相 $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ を生成しなければならない状況なら，これは我慢するしかない．この場合，$\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ の準開基として即座に $\mathcal{S}$ を得られる．ところが，先に位相 $\mathcal{O}$ を与えられた上で，うまく設定した $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が $\mathcal{O}$ の準開基であることを確かめるのは，少し面倒である．その際，我々は，「任意の $U \in \mathcal{O}$ と任意の $p \in U$ に対し，ある有限部分族 $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ が存在して，$p \in \bigcap \mathcal{S}_0$ かつ $\bigcap \mathcal{S}_0 \subseteq U$ を満たす」ことを，確かめなければならない．この「有限部分族」，これがつらい．これが一個で済めば（代わりに「ある $S \in \mathcal{S}$ が存在して……」とできれば）どれほどいいことか．

そういうわけなので，準開基には一旦ご退場願おう．

定義 4.2.3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の**開基**であるとは，任意の $U \in \mathcal{O}$ に対し，ある $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ が存在して $U = \bigcup \mathcal{B}_0$ を満たすことをいう．

これで，夢が叶う．

補題 4.2.4. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の開基とし，$U \subseteq X$ とする．以下は同値である．

(a) $U \in \mathcal{O}$ である．
(b) 任意の $p \in U$ に対し，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して，$p \in B$ かつ $B \subseteq U$ である．

［証］ 簡単に証明できる． （証終）

例 4.2.5.

- $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とし，$\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ を $\mathcal{S}$ が生成する X の位相とする．このとき，命題 4.2.1 の $\mathcal{S}_0$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ の開基である．
- (X, d) を距離空間とする．

$$\mathcal{B}_d := \{ B_d(p; r) \subseteq X \mid p \in X \wedge r \in \mathbb{R}_{>0} \}$$

と定める．$\mathcal{B}_d$ は $\mathcal{O}_d$ の開基である．

- $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ を n 次元ユークリッド空間とする．

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} := \{B_d(p; 2^{-n}) \subseteq \mathbb{R}^n \mid p \in \mathbb{Q}^n \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

と定める．$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ の開基である．また，$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ は可算集合である．

開基は，次の性質を満たす．

命題 4.2.6 (開基の公理)**.** $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の開基とする．このとき，次が成り立つ．

(B1) $X = \bigcup \mathcal{B}$ である．

(B2) 任意の $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$ と任意の $p \in B_0 \cap B_1$ に対し，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して，$p \in B$ かつ $B \subseteq B_0 \cap B_1$ を満たす．

［証］

(B1) $X \in \mathcal{O}$ であるから，ある $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ が存在して $X = \bigcup \mathcal{B}_0$ である．よって，$X = \bigcup \mathcal{B}$ である．

(B2) $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$ を任意に取る．このとき，$B_0 \cap B_1 \in \mathcal{O}$ であるから，補題 4.2.4 より，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して $p \in B$ かつ $B \subseteq B_0 \cap B_1$ を満たす．（証終）

今度は，近傍系の公理 (N4)（基本近傍系の公理では (NB3)）すら消滅した．議論がどんどん楽な方向へと向かっているのが分かるだろう．

開集合系と開基も，（前節と同じ意味で）互換的である．

定理 4.2.7. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の開基とする．

$$\mathcal{O}_{\mathcal{B}} := \{U \subseteq X \mid \forall p \in U; \exists B \in \mathcal{B}; (p \in B \wedge B \subseteq U)\}$$

と定義する．このとき，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ である．特に，$\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ は X の位相である．

［証］ 補題 4.2.4 からの帰結である．（証終）

定理 4.2.8. X を集合とする．$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が，命題 4.2.6 の 2 条件 (B1), (B2) をすべて満たすとする．このもとで，

$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X \mid \forall p \in U; \exists B \in \mathcal{B}; (p \in B \wedge B \subseteq U)\}$$

と定める．このとき，$\mathcal{O}$ は X の位相となり，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基となる．

［証］ まず，$\mathcal{O}$ が X の位相であることを示す．

(O1) 明らかに $\emptyset \in \mathcal{O}$ である．また，任意の $p \in X$ に対し，(B1) より，ある $B \in \mathcal{O}$ が存在して $p \in B$ を満たす．この B は $B \subseteq X$ も満たす．よって，$X \in \mathcal{O}$ である．

(O2) $\mathcal{O}$ の部分族 $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を任意に取る．このもとで，$p \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を任意に取る．このとき，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $p \in U_\lambda$ を満たす．この λ を一つ取る．$U_\lambda \in \mathcal{O}$ であるから，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して，$p \in B$ かつ $B \subseteq U_\lambda$ を満たす．この B を一つ取る．すると，$B \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ である．よって，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である．

(O3) $U_0, U_1 \in \mathcal{O}$ を任意に取る．このもとで，$p \in U_0 \cap U_1$ を任意に取る．$\mathcal{O}$ の定義より，ある $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$ が存在して，$p \in B_0$，$B_0 \subseteq U_0$，$p \in B_1$，$B_1 \subseteq U_1$ をすべて満たす．この B_0, B_1 を一つずつ取る．こ

のとき，(B2) より，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して，$p \in B$ かつ $B \subseteq B_0 \cap B_1$ を満たす．この B を一つ取る．すると，$B \subseteq U_0 \cap U_1$ である．よって，$U_0 \cap U_1 \in \mathcal{O}$ である．

ここで，任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し，明らかに $B \in \mathcal{O}$ であるから，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ である．

最後に，$\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ の開基となることを示す．$U \in \mathcal{O}$ を任意に取る．$p \in U$ を任意に取る．このとき，ある $B \in \mathcal{B}$ が存在して，$p \in B$ かつ $B \subseteq U$ を満たす．そこで，

$$\mathcal{B}_p := \{B \in \mathcal{B} \mid p \in B \wedge B \subseteq U\} \subseteq \mathcal{O}$$

とおく．このとき，$\mathcal{B}_p \subseteq \mathcal{B}$ で，更に $p \in \bigcup \mathcal{B}_p$ かつ $\bigcup \mathcal{B}_p \subseteq U$ を満たす．このもとで，

$$\mathcal{B}' := \bigcup_{p \in U} \mathcal{B}_p \subseteq \mathcal{B}$$

とおくと，$U = \bigcup \mathcal{B}'$ である．従って，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{O}$ の開基である．（証終）

最後に，開基の使用例を挙げておく．

例題 4.2.9. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間，$\mathcal{B}_Y$ を $\mathcal{O}_Y$ の開基とし，$f \colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を写像とする．以下は同値である．

(a) f は連続である．
(b) 任意の $B \in \mathcal{B}_Y$ に対し，$f^{-1}[B] \in \mathcal{O}_X$ である．

例題 4.2.10. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{O}$ の開基とする．$p \in X$ に対し，

$$\mathcal{U}(p) := \{B \in \mathcal{B} \mid p \in B\}$$

と定める．族 $(\mathcal{U}(p))_{p \in X}$ は X の基本近傍系である．

A　直積位相

位相空間を渡る写像 $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ の連続性について考える．f が連続であることは，「任意の $U \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}[U] \in \mathcal{O}_X$ である」ことと同値であった．このことから，$\mathcal{O}_Y$ が小さい（弱い）ほど，また，$\mathcal{O}_X$ が大きい（強い）ほど，写像 f は連続になりやすいことがわかる．特に，$\mathcal{O}_Y$ が密着位相のとき，または，$\mathcal{O}_X$ が離散位相のとき，f は連続である．

そこで，位相空間 $(Y, \mathcal{O}_Y)$ と写像 $f\colon X \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が与えられていたとする．f を連続にするような X の位相の中で最強のものは離散位相である．これは明白な結果なので，あまり気にならない．より目を引くのは，そのような X の位相の中で「最弱」なものの存在である．f を連続ならしめるとしたら，X の位相には，各 $U \in \mathcal{O}_Y$ に対して $f^{-1}[U]$ が入ることになる．そのような状況で最弱の位相を作り出す方法を，我々は知っている．

定義は一般形で書くことにしよう．

定義 A.1. X を集合，$((Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族，$(f_\lambda\colon X \to (Y_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を写像の族とする．X の部分集合族

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &:= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \left\{ f_\lambda^{-1}[U_\lambda] \mid U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\} \\ &= \left\{ V \subseteq X \mid \exists\lambda \in \Lambda; \exists U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda; V = f_\lambda^{-1}[U_\lambda] \right\}\end{aligned}$$

が生成する X の位相を，$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ によって**誘導される位相（誘導位相）**という．

例 A.2. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$A \subseteq X$ とする．このとき，包含写像 $\iota\colon A \to X; x \mapsto x$ が定義される．A の $\mathcal{O}$ からの相対位相は，ι による誘導位相に他ならない．

誘導位相の能力は，これに留まらない．

$(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とし，その直積を $\tilde{X} := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおく．このとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，射影

$$\pi_\lambda\colon \tilde{X} \to X_\lambda; (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto x_\lambda$$

が定義されることを思え．

定義 A.3. $((X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とし，$\tilde{X} := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおき，$(\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を射影の族とする．このとき，$(\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ によって誘導される $\tilde{X}$ の位相を，$\tilde{X}$ の**直積位相**という．

直積位相における $\mathcal{S}$ を具体的に書いてみよう．各 $\lambda \in \Lambda$ と各 $U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$ に対し，

$$\pi_\lambda^{-1}[U_\lambda] = U_\lambda \times \prod_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} X_\mu$$

である．よって，

$$\mathcal{S} = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{唯一の}\lambda \in \Lambda\text{で } U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda, \\ \text{それ以外の}\lambda \in \Lambda\text{で } U_\lambda = X_\lambda \end{array} \right\}$$

である．直積位相の開基 $\mathcal{B}$ に，「$\mathcal{S}$ の有限部分族の共通部分」全体を取れるから，

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{有限個の}\lambda \in \Lambda\text{で } U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda, \\ \text{それ以外の}\lambda \in \Lambda\text{で } U_\lambda = X_\lambda \end{array} \right\}$$

とできる．特に，Λ が有限集合のときは，開基は更に簡単に

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \;\middle|\; \forall \lambda \in \Lambda; U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\}$$

と書ける．以降，単に直積位相空間の準開基や開基といえば，この $\mathcal{S}$ や $\mathcal{B}$ を指す．

例題 A.4. 任意の正の整数 n に対し，$(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ と，$(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ の n 個直積位相空間とは，同相である．

このように，直積位相の作り方は，有限個にせよ無限個にせよ，生成という意味では変わらない．しかし，その姿は時として大いに変わる．次の例が，その理解に供するだろう．

例 A.5. $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ は，単位開区間を表す．

(1) $(\mathbb{R}^n, d_{\mathbb{R}^n})$ に対し，$I^n := (0,1)^n$ は，$\mathbb{R}^n$ の開集合である．
(2) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に直積位相を入れ，位相空間と見なす．このもとで，$\tilde{I} := (0,1)^{\mathbb{N}}$ は，$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の開集合でない．

［証］

(1) I^n は，直積位相空間 $\mathbb{R}^n$ の開基の要素である．
(2) $(1/2)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{I}$ である．この点を包含するいかなる開基の要素も，ある成分で $\mathbb{R}$ 全体を覆うから，$\tilde{I}$ の部分集合たり得ない．よって，補題 4.2.4 より，$\tilde{I}$ は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の開集合でない． （証終）

では，無限直積位相も，開集合の直積全体を開基にもつものとして定義するべきであったかというと，そうもいかない．開集合の直積全体を開基にもつ位相は，無限直積においてはあまりにも強すぎる．

命題 A.6. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，Λ を無限集合，$\tilde{X} := X^\Lambda$ とし，写像 $f\colon (X, \mathcal{O}) \to \tilde{X}$ を，$x \in X$ に対し

$$f(x) = (x)_{\lambda \in \Lambda}$$

と定める．（この f は**対角写像**とよばれる）

(1) $\tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{b}}$ を，X の開集合の直積全体を開基にもつ $\tilde{X}$ の位相[*8]とする．このとき，f は連続であるとは限らない．
(2) $\tilde{\mathcal{O}}$ を，$\tilde{X}$ の直積位相とする．このとき，f は連続である．

［証］

(1) 具体例を以て示す．$(X, \mathcal{O}) = (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$，$\Lambda = \mathbb{N}$ とする．$0 \in \mathbb{R}$ を取る．また，$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$U_n := \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right)$$

とおき，$\tilde{U} := \prod_{n \in \mathbb{N}} U_n$ と定める．すると，$\tilde{U}$ は $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{b}})$ 上での $f(0)$ の開近傍だが，

$$f^{-1}[\tilde{U}] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$$

[*8] 直積位相と区別して，**箱位相**とよばれる．$\tilde{\mathcal{O}}_{\mathrm{b}}$ の b は，box に由来する．

は 0 の X 上近傍でない．よって，f は 0 で連続でない．（同様にすると，f は $\mathbb{R}$ 上至る所不連続であることが示せる）

(2) こちらは一般の場合で示す．$\tilde{\mathcal{O}}$ の開基の要素 $\tilde{U} = \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を任意に取る．このとき，ある $n \in \mathbb{N}$ と，ある $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して，
- 任意の $k \in \{0, \cdots, n\}$ に対して $U_{\lambda_k} \in \mathcal{O}$,
- 任意の $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0, \cdots, \lambda_n\}$ に対して $U_\lambda = X_\lambda$

を共に満たす．この n と $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ を一組取る．すると，

$$f^{-1}[\tilde{U}] = \bigcap_{k=0}^{n} U_{\lambda_k}$$

で，これは X の開集合である．よって，例題 4.2.9 より，f は連続である． （証終）

加之，生成によって作られる直積位相は，とても良く振る舞う．

定理 A.7 (Tychonoff の定理)**.** 任意個のコンパクト空間の直積は，再びコンパクトである．

開集合の直積全体を開基にもつ位相を直積集合に入れるとき，有限離散位相空間の無限直積は再び離散位相空間となり，一般にはコンパクトにならない（$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ を考えよ）．しかし，誘導位相の方法で作った直積位相に関しては，コンパクトになる．実は，Tychonoff の定理は（ZF において）選択公理と同値であることが知られている．ここでは，定理の主張の紹介に留め，その証明は行わない．

この定理は，幾つかの有用な空間を作り出す．

例 A.8. 次の集合に直積位相を入れ，位相空間と見なしたものは，いずれもコンパクトである．

- 2 点離散位相空間の可算直積 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$．これは **Cantor 空間**と呼ばれる．
- 単位閉区間の可算直積 $[0,1]^{\mathbb{N}}$．これは **Hilbert 立方体**と呼ばれる．

本講は，これで終わりである．

参考文献

[1] 内田伏一，集合と位相（増補新装版），裳華房，2020.

[2] 小山晃，位相空間論—現代数学への基礎—，森北出版，2021.

[3] 縫田光司，添字つき集合族と添字なし集合族と選択公理に関する覚書，`https://researchmap.jp/multidatabases/multidatabase_contents/detail/228935/4eba15c9e9e3e3350abb882e5f23bcda?frame_id=617073`，2017.（2023 年 4 月 4 日現在）

[4] Mathpedia, `https://math.jp/wiki/位相空間論2:近傍と基本近傍系`.（2023 年 3 月 10 日現在）

[5] L. E. Ward, Jr, *Fixed point sets.* Pacific J. Math., **47**, (1973), 553-565, p.554.

動画リンク

1 章　第 1 講 A(sm41931046)
2 章　第 1 講 B(sm41980052)
3 章　第 1 講 C(sm42038676)
4 章　第 1 講 D(sm42188789)
補講　第 1 講 +(sm42688298)

更新履歴

2023/03/15　1 章公開.
2023/03/24　2 章公開．Twitter リンク追記．動画リンク欄追加.
2023/04/05　3 章公開.
2023/05/07　4 章公開.
2023/08/30　補講公開.
2023/10/13　誤植訂正.
2024/06/08　一部修正（系 3.3.3 直後「コンパクト空間」$\mapsto$「空でないコンパクト空間」).