ボイボ寮生 数学講座 ノート

第 2 講　テンソル積

麻崎系 @cor_asazaki

2026 年 4 月 6 日

概要

本講では，線型空間のテンソル積・テンソル代数・外積代数を構成する．線型代数学および線型空間に関する基本的な知識を仮定する（例えば [3]1–7 章）．環論の言葉をいくつか知っていると便利だが，こちらの知識は仮定しない．

読者に確認を委ねる部分は，青字で示した．環論の言葉を用いた部分は，緑字で示した．なお，本文と緑字それぞれの記述が整合することは，いちいち確かめない．

目次

1　線型空間の準備

1.1　商空間

本講全体を通して，体 K を固定する．単に線型空間といえば，K 上の線型空間を指すものとする．また，元がどの集合に属するものであるかは，文脈から読み取れる場合，省略することがある．更に，線型空間 V に対し，$v \in V$ の $\kappa \in K$ によるスカラー倍 κv は，その方が便利なときには $v\kappa \coloneqq \kappa v$ とも書く．この記法は，可換環上の左加群と右加群の概念が一致することに由来する．以降，換言の際は，K を可換環とする．最後に，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ には 0 を含める．

V を線型空間，$W \subseteq V$ をその部分空間とする．このもとで，V 上の二項関係 $\sim$ を，$x, y \in V$ に対して

$$x \sim y \underset{\text{def}}{\iff} x - y \in W$$

で定義する．この $\sim$ は V 上の同値関係である．よって，商集合 $V/W \coloneqq V/{\sim}$ が定義される．$x \in V$ の $\sim$ に関する同値類を $[x] \coloneqq \{x + w \mid w \in W\}$ と書く．

V/W 上に和とスカラー倍を定義しよう．$[x], [y] \in V/W$ と $\kappa \in K$ に対し，和とスカラー倍をそれぞれ

$$\begin{aligned}[x] + [y] &\coloneqq [x + y], \\ \kappa[x] &\coloneqq [\kappa x]\end{aligned}$$

で定める．この演算は well-defined である: $x', y' \in V$ を，$[x] = [x']$ かつ $[y] = [y']$ を満たすよう任意に取る．このとき，ある $v, w \in W$ が存在して，$x' = x + v$ と $y' = y + w$ を満たす．この v と w を一つずつ取る．すると，

$$\begin{aligned}[x' + y'] &= [x + y + v + w] = [x + y], \\ [\kappa x'] &= [\kappa x + \kappa v] = [\kappa x]\end{aligned}$$

であるから，$[x] + [y] = [x'] + [y']$ および $\kappa[x] = \kappa[x']$ である．

定義 1.1.1. V を線型空間，$W \subseteq V$ をその部分空間とする．以上で定まる和とスカラー倍を備えた V/W を，V の W による**商線型空間**，または単に**商空間**とよぶ．

例題 1.1.2. 商空間は線型空間である．

商空間 V/W は常に，とある写像を備えている．

定義 1.1.3. V を線型空間，$W \subseteq V$ をその部分空間とする．写像 $p\colon V \to V/W$ を，$x \in V$ に対して $p(x) = [x]$ で定める．p を**商写像**，または**自然な射影**とよぶ．

命題 1.1.4. V を線型空間，$W \subseteq V$ をその部分空間とする．商写像 $p\colon V \to V/W$ は線型写像で，その核は $\ker p = W$ である．

［証］ $x \in V$ に対して $p(x) = [x]$ であるので，p の線型性は，商空間の和とスカラー倍の定義から直ちに従う．$w \in W$ はすべて $p(w) = [w] = [0]$ を満たす．逆に，$p(x) = [0]$ を満たす任意の $x \in V$ は，$x - 0 \in W$ より $x \in W$ を満たす．よって，$\ker p = W$ である． □

商空間を紹介したからには，これ以降にも商空間を作り，それについて議論する場面があるということである．しかし，今のようにしていちいち商空間を作るのは，時と場合によっては面倒になる．そこで，この手順を「普遍性」とよばれる概念によって簡略化する．それに先立ち，また別の概念を用意する．

定義 1.1.5. **図式**とは，いくつかの集合を，それらを渡る写像で繋いだものである．集合は通常の文字で，写像は矢印で，それぞれ書かれる．図式が**可換**であるとは，矢印の連なりが，始点と終点を同じくするとき，どれも同じ（合成）写像を定めることをいう．

例 1.1.6. V を線型空間, $W \subseteq V$ をその部分空間とし，$p\colon V \to V/W$ を商写像とする．写像 $p \times p\colon V \times V \to V/W \times V/W$ を，$(x, y) \in V \times V$ に対して $(p \times p)(x, y) \coloneqq (p(x), p(y))$ で定める．このとき，各行を V と V/W それぞれの加法とすると，次の図式は可換になる．

$$\begin{tikzcd}
V \times V \arrow[r, "s"] \arrow[d, "p \times p"'] & V \arrow[d, "p"] \\
V/W \times V/W \arrow[r, "s'"] & V/W
\end{tikzcd}$$

実際，任意の $(x, y) \in V \times V$ に対して

$$(p \circ s)(x, y) = [x + y] = [x] + [y] = p(x) + p(y) = (s' \circ (p \times p))(x, y)$$

となるので，$p \circ s = s' \circ (p \times p)$ が成り立つ．

図式は，普遍性を確かめたり，普遍性を用いたりするときに，視覚を力強く助ける．以降，図式中の矢印のうち，所与の写像を表すものは実線，これから存在を示す写像を表すものは破線で統一する．また，可読性を期して，適宜，写像の合成の $\circ$ や，元の代入の括弧を省略する．例えば，$f \circ g \circ h$ を fgh，$f(x)$ を fx など．

定理 1.1.7. V を線型空間，$W \subseteq V$ をその部分空間とする．商空間 V/W と商写像 $p\colon V \to V/W$ は，次の普遍性を満たす: 任意の線型空間 X と，核が W を包含するような任意の線型写像 $f\colon V \to X$ に対して，ある線型写像 $t\colon V/W \to X$ が唯一存在して，$t \circ p = f$ を満たす．

［証］ 次の図式の p, f は所与である．これが，唯一の t によって可換となることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\
V/W \arrow[r, dotted, "t"'] & X
\end{tikzcd}$$

まず，t の存在を示す．$[x] \in V/W$ に対し，$t([x]) \coloneqq f(x)$ と定める．これは well-defined である: $x' \in V$ を，$[x] = [x']$ を満たすよう任意に取る．このとき，$x - x' \in W$ であるから，f の線型性と $W \subseteq \ker f$ より，$f(x) - f(x') = f(x - x') = 0$，つまり $f(x) = f(x')$ を得る．また，定義より $t \circ p = f$ を満たし，f の線型性から，t は線型写像である．これで存在が言えた．

次に，t の一意性を示す．線型写像 $t'\colon V/W \to X$ を，$t' \circ p = f$ を満たすよう任意に取る．このとき，任意の $x \in V$ に対して，$t'([x]) = (t' \circ p)(x) = f(x) = (t \circ p)(x) = t([x])$ が成り立つ．よって，$t = t'$ である．これで一意性も言えた． □

最も手近な普遍性の応用例は，同じ普遍性をもつ（この場合は）線型空間の一意性である．

命題 1.1.8. V を線型空間，$W \subseteq V$ をその部分空間とする．(Y, q) と (Z, r) を，商空間の普遍性を満たすような，線型空間と，核が W を包含する V 上の線型写像 $q\colon V \to Y$, $r\colon V \to Z$ との組とする．このとき，Y と Z は同型である．

［証］ 次の図式の q, r は所与である．

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "q"'] \arrow[d, "r"] \arrow[dr, "q"] & \\ Y \arrow[r, dotted, "s"'] & Z \arrow[r, dotted, "t"'] & Y \end{tikzcd}$$

まず，Y に関する普遍性から，$s \circ q = r$ を満たす線型写像 $s\colon Y \to Z$ が唯一存在する．次に，Z に関する普遍性から，$t \circ r = q$ を満たす線型写像 $t\colon Z \to Y$ が唯一存在する．この s と t を取る．すると，$tsq = q$ であるので，次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Y \arrow[rr, "ts"'] & & Y \end{tikzcd}$$

ところが，Y に関する普遍性から，$u \circ q = q$ を満たす（図式の ts に相当する）線型写像 $u\colon Y \to Y$ は唯一で，実際に $u = \mathrm{id}_Y$ を取れる．よって，$t \circ s = \mathrm{id}_Y$ である．(Y, q) と (Z, r) の役割を入れ替えることで，同様に $s \circ t = \mathrm{id}_Z$ が得られる．従って，Y と Z は同型である．　□

この証明を以て，商空間の普遍性を満たす線型空間であればなんであれ，V の W による商空間と思えるようになった．逆に，そのような線型空間は確かに存在する．まさにそれを一つ，本節の最初で具体的に構成した．よって，何か勝手な（そして複雑な）線型空間とその部分空間を与えられ「商を取りなさい」と指示されたとき，我々は，また商空間を一から作り直すのではなく，「商空間の普遍性を満たす線型空間ですね」と答えて，代わりに例の図式を用意すればよい．多くの場合，それこそ今回目にすることになる状況では，それで事足りる．

普遍性は，商空間にしか宿らないわけではない．次の例へ進もう．

1.2 自由空間

X を集合とする．このとき，X から K への関数全体の集合 K^X は，次の方法で線型空間をなす．即ち，関数 $f, g\colon X \to K$ と $\kappa \in K$ に対し，和とスカラー倍をそれぞれ点ごとに，つまり，$x \in X$ に対して

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x),$$
$$(\kappa f)(x) \coloneqq \kappa f(x)$$

となるように定める．$f + g$ と κf が共に関数 $X \to K$ であることに注意．K がそれ自身線型空間であることから，K^X が線型空間となることを示せる（$X = \emptyset$ のとき，K^X は（0 しかもたない）自明な線型空間 0 になる）．しかし，我々のお目当てはこれではない．K^X では一般に大きすぎるのだ．そこで，もう少し小さな空間を探しにいく．

$x \in X$ とする．関数 $\varepsilon_x\colon X \to K$ を，$y \in X$ に対して

$$\varepsilon_x(y) \coloneqq \begin{cases} 1, & x = y \text{ のとき}, \\ 0, & x \neq y \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める．各 $x \in X$ に対して $\varepsilon_x \in K^X$ であって，ε_x たちは（どの有限個も）線型独立である．よって，$\{\varepsilon_x \mid x \in X\}$ が生成する（特に，これを基底にもつ）K^X の部分空間が定まる．欲しいのはこれである．

定義 1.2.1. X を集合とする．以上で定まる，$\{\varepsilon_x \mid x \in X\}$ が生成する K^X の部分空間を，X 上の**自由線型空間**，または単に**自由空間**とよび，$K^{(X)}$ で書き表す．

$K^{(X)}$ は，関数 $X \to K$ であって，X の有限個の点を除いて値が 0 になるようなもの，同じことだが，0 でない値を取る X の点が高々有限個であるようなもの，の全体がなす線型空間である．当然，$X = \emptyset$ のときは $K^{(X)}$ も自明な線型空間 0 になる．

なぜ K^X では「大きすぎる」のだろう？ ——X が有限集合のときは，K^X と $K^{(X)}$ は一致する．しかし，無限集合となると，K^X の方が真に大きくなる．それも，かなり．

例題 1.2.2. $K^{\mathbb{N}} \setminus K^{(\mathbb{N})}$ の元 δ_0 を一つ挙げよ．これにより，$\{\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が $K^{\mathbb{N}}$ の基底でないことを示せ．また，今挙げた δ_0 に関して，$\{\varepsilon_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\delta_0\}$ も $K^{\mathbb{N}}$ の基底でないことを示せ．

言い方を変えよう．まず，定義から単射 $\varepsilon\colon X \to K^{(X)}; x \mapsto \varepsilon_x$ が定まる．つまり，x と ε_x を同一視することで，$X \subseteq K^{(X)}$ と思うことができる．このもとで，$K^{(X)}$ の基底は X そのものになる．つまり，「$K^{(X)}$ は X が生成する線型空間である」という言葉が意味をもつ．X が有限集合のとき，$K^X = K^{(X)}$ なのだから，K^X もまた X が生成する線型空間である．他方，X が無限集合のとき，K^X は X よりも真に大きな基底をもつ．即ち，K^X は X のみによっては張られない．用意した集合 X によってちょうど張られるところが，自由空間の強さである．

しかも，自由空間は普遍性を備えている．

定理 1.2.3. X を集合とする．自由空間 $K^{(X)}$ と写像 $\varepsilon\colon X \to K^{(X)}$ は，次の普遍性を満たす: 任意の線型空間 V と任意の写像 $f\colon X \to V$ に対し，ある線型写像 $t\colon K^{(X)} \to V$ が唯一存在して，$t \circ \varepsilon = f$ を満たす．

［証］ 次の図式の ε, f は所与である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "f"'] & K^{(X)} \arrow[d, dotted, "t"] \\ & V \end{tikzcd}$$

$X = \emptyset$ のとき，線型写像 $t\colon 0 \to V$ は自明なもの一つに限る．また，$t \circ \varepsilon$ と f は共に空写像 $\emptyset \to V$ であるから，一致する．以下，$X \neq \emptyset$ とする．

t を，$K^{(X)}$ の基底の元 ε_x に対して $t(\varepsilon_x) = f(x)$ で定め，$K^{(X)}$ 上に線型に拡張する．即ち，$e \in K^{(X)}$ が $e = \kappa_1\varepsilon_{x_1} + \cdots + \kappa_n\varepsilon_{x_n}$ $(\kappa_i \in K,\ x_i \in X)$ と線型結合で書かれたとき，$t(e) \coloneqq \kappa_1 f(x_1) + \cdots + \kappa_n f(x_n)$ で定義する．元の線型結合の表示は基底を一つ決めると一意的であるから，t は well-defined である．また，定義より t は線型写像で，任意の $x \in X$ に対して $(t \circ \varepsilon)(x) = t(\varepsilon_x) = f(x)$ であるから，$t \circ \varepsilon = f$ を満たす．これで存在が言えた．

線型写像 $t'\colon K^{(X)} \to V$ を，$t' \circ \varepsilon = f$ を満たすよう任意に取る．このとき，任意の $x \in X$ に対して $t'(\varepsilon_x) = f(x) = t(\varepsilon_x)$ が成り立つ．よって，任意の $e \in K^{(X)}$ に対して，先ほどの線型結合の表示のもと，t'

の線型性より

$$\begin{aligned} t'(e) &= \kappa_1 t'(\varepsilon_{x_1}) + \cdots + \kappa_n t'(\varepsilon_{x_n}) \\ &= \kappa_1 t(\varepsilon_{x_1}) + \cdots + \kappa_n t(\varepsilon_{x_n}) \\ &= t(e) \end{aligned}$$

となる．従って，$t = t'$ である．これで一意性も言えた． □

商空間のときと同様にして，自由空間とよばれるべき線型空間の一意性も，普遍性からわかる．

例題 1.2.4. X を集合とする．$(Y, \gamma), (Z, \delta)$ を，自由空間の普遍性を満たすような，線型空間と，X 上の写像 $\gamma\colon X \to Y$, $\delta\colon X \to Z$ との組とする．このとき，Y と Z は同型である．

特に，B を線型空間 V の基底とすると，$K^{(B)}$ と V は同型である．証明中の「線型に拡張する」という言葉は，まさしく，線型空間 W への写像 $f\colon B \to W$ に対応する線型写像 $t\colon K^{(B)} \to W$ を（ただ）一つもってくることを指す．即ち，写像 f で，V の基底の元に対する t の値を計画し，それに適う線型写像 t を現に一つ，普遍性から生ぜしめている．

我々が K^X を選ばないことにした理由は，ここに再述される．写像 $\bar{\varepsilon}\colon X \to K^X$ を，$x \in X$ に対して $\bar{\varepsilon}(x) \coloneqq \varepsilon_x$ で定める．$\bar{\varepsilon}$ は，ε と包含写像 $K^{(X)} \hookrightarrow K^X$ の合成である．

命題 1.2.5. 線型空間 $K^{\mathbb{N}}$ と写像 $\bar{\varepsilon}\colon \mathbb{N} \to K^{\mathbb{N}}$ は，自由空間の普遍性を満たさない．

［証］ 次の図式の $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ は所与である．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\bar{\varepsilon}"'] & K^{(\mathbb{N})} \arrow[d, dotted, "t"] \\ & K^{\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

$K^{(\mathbb{N})}$ の普遍性から，この図式を可換にする線型写像 $t\colon K^{(\mathbb{N})} \to K^{\mathbb{N}}$ は唯一で，実際に包含写像を取れる．ここで，仮に $K^{\mathbb{N}}$ と $\bar{\varepsilon}$ が自由空間の普遍性を満たすとすると，t は同型写像になるはずだが，例題 1.2.2 より $K^{\mathbb{N}} \setminus K^{(\mathbb{N})} \neq \emptyset$ であるから，t は全射でない．従って，$K^{\mathbb{N}}$ と $\bar{\varepsilon}$ は自由空間の普遍性を満たさない． □

自由空間も，また後で登場する．その際，何か集合 X を与えられて，もう一度 X 上の自由空間を作り直すのは大変である．この部分の作業は，せっかく自由空間の普遍性があるのなら，それに一部を手伝ってもらうのがよいだろう．そのために，自由空間として K^X ではなく $K^{(X)}$ を連れてきた，と考えることもできる．

線型空間のテンソル積の構成には，自由空間と商空間の概念が，どちらも必要になる．テンソル代数の観察まで進むのなら，次に紹介する，直和空間（双積）の概念も不可欠になる．

1.3 直和空間

前もって，線型写像の和と合成に関する性質を見ておく．V, W を線型空間とする．線型写像 $V \to W$ 全体の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ が，K^X のときと全く同様に，点ごとの和とスカラー倍，即ち，線型写像 $f, g\colon V \to W$ に対する

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x) + g(x),$$
$$(\kappa f)(x) \coloneqq \kappa f(x)$$

によって，線型空間をなすことに注意．特に，$\mathrm{Hom}(V,W)$ の加法零元は，**零写像**とよばれる，すべての元を 0 に写す線型写像である．

命題 1.3.1. V,W,X を線型空間，$g,g_i\colon V\to W$, $f,f_i\colon W\to X$ $(i=1,2)$ を線型写像とする．このとき，

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)\circ g&=f_1\circ g+f_2\circ g,\\ f\circ(g_1+g_2)&=f\circ g_1+f\circ g_2\end{aligned}$$

が，共に成り立つ．

［証］ 実際に計算すると，

$$\begin{aligned}((f_1+f_2)g)(x)&=(f_1+f_2)(g(x))=f_1(g(x))+f_2(g(x))=(f_1g+f_2g)(x),\\ (f(g_1+g_2))(x)&=f(g_1(x)+g_2(x))=f(g_1(x))+f(g_2(x))=(fg_1+fg_2)(x)\end{aligned}$$

となる． □

特に，線型写像 $f\colon V\to W$ に対して，適切な線型空間上の恒等写像 1 との合成 $1f, f1$ がスカラー倍 $1f=f1$ と等しくなること，そして，適切な線型空間上の零写像 0 との合成 $0f, f0$ がスカラー倍 $0f=f0$ と等しくなること，は顕著である（それぞれの 1 と 0 の定義域と終域は何者か？）．

本題に入ろう．V_1,V_2 を線型空間とする．このとき，直積集合 $V_1\times V_2$ は，成分ごとの和とスカラー倍

$$\begin{aligned}(v_1,v_2)+(w_1,w_2)&\coloneqq(v_1+w_1,v_2+w_2),\\ \kappa(v_1,v_2)&\coloneqq(\kappa v_1,\kappa v_2)\end{aligned}$$

を入れることで，線型空間となる．

定義 1.3.2. V_1,V_2 を線型空間とする．以上で定まる線型空間を，V_1 と V_2 の**双積**，**直和空間**，または単に**直和**などとよび，$V_1\oplus V_2$ で書き表す．

双積 $V_1\oplus V_2$ には，4 つの線型写像が備わっている．うち 2 つは**射影** p_i，うち 2 つは**入射** e_i とよばれる．

命題 1.3.3. V_1,V_2 を線型空間とする．双積 $V_1\oplus V_2$ に対し，4 つの線型写像

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, shift right, "e_1"'] & V_1\oplus V_2 \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[r, shift left, "p_2"] & V_2 \arrow[l, shift left, "e_2"] \end{tikzcd}$$

が存在して，次を満たす:

$$\begin{aligned}p_1e_1&=1,\quad p_1e_2=0,\quad 1\text{ は }V_1\text{の恒等写像};\\ p_2e_1&=0,\quad p_2e_2=1,\quad 1\text{ は }V_2\text{の恒等写像};\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$e_1p_1+e_2p_2=1,\quad 1\text{ は }V_1\oplus V_2\text{の恒等写像}.\tag{1.2}$$

［証］ $i=1,2$ に対し，写像 $p_i\colon V_1\oplus V_2\to V_i$ と $e_i\colon V_i\to V_1\oplus V_2$ を

$$p_1(v_1,v_2)\coloneqq v_1,\quad p_2(v_1,v_2)\coloneqq v_2,\quad e_1(v_1)\coloneqq(v_1,0),\quad e_2(v_2)\coloneqq(0,v_2)$$

と定めると，これは線型写像で，等式 (1.1) と (1.2) を共に満たす． □

そして，$V_1\oplus V_2$ は，「双積」，即ち「積かつ余積」と称されるに足る．まずは積について．

定理 1.3.4. V_1, V_2 を線型空間とする．双積 $V_1 \oplus V_2$ と射影 p_i は，次の普遍性を満たす: 任意の線型空間 W と任意の線型写像 $t_i\colon W \to V_i$ $(i = 1, 2)$ に対し，ある線型写像 $t\colon W \to V_1 \oplus V_2$ が唯一存在して，$p_1 \circ t = t_1$ と $p_2 \circ t = t_2$ を共に満たす．

［証］ 次の図式の p_i, t_i は所与である．

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[d, dotted, "t"] \arrow[dr, "t_2"] & \\ V_1 & V_1 \oplus V_2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

まずは，t を必要性から特定する．可換性 $p_1 t = t_1$ と $p_2 t = t_2$ は，(1.2) と，線型写像の和と合成に関する分配則より

$$t = (e_1 p_1 + e_2 p_2) t = e_1 p_1 t + e_2 p_2 t = e_1 t_1 + e_2 t_2$$

を含意する．よって，t は存在すれば $e_1 t_1 + e_2 t_2$ に限られる．逆に，$e_1 t_1 + e_2 t_2$ は線型写像 $W \to V_1 \oplus V_2$ で，(1.1) と分配則から，

$$\begin{aligned} p_1(e_1 t_1 + e_2 t_2) &= p_1 e_1 t_1 + p_1 e_2 t_2 = 1 t_1 + 0 t_2 = t_1, \\ p_2(e_1 t_1 + e_2 t_2) &= p_2 e_1 t_1 + p_2 e_2 t_2 = 0 t_1 + 1 t_2 = t_2 \end{aligned}$$

となる． □

次に，余積について．

定理 1.3.5. V_1, V_2 を線型空間とする．双積 $V_1 \oplus V_2$ と入射 e_i は，次の普遍性を満たす: 任意の線型空間 X と任意の線型写像 $s_i\colon V_i \to X$ $(i = 1, 2)$ に対し，ある線型写像 $s\colon V_1 \oplus V_2 \to X$ が唯一存在して，$s \circ e_1 = s_1$ と $s \circ e_2 = s_2$ を共に満たす．

［証］ 次の図式の e_i, s_i は所与である．

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[dr, "s_1"'] & V_1 \oplus V_2 \arrow[d, dotted, "s"] & V_2 \arrow[l, "e_2"'] \arrow[dl, "s_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

先ほどと同じく，可換性 $s e_1 = s_1$ と $s e_2 = s_2$ は，(1.2) と分配則より

$$s = s(e_1 p_1 + e_2 p_2) = s e_1 p_1 + s e_2 p_2 = s_1 p_1 + s_2 p_2$$

を含意する．よって，s は存在すれば $s_1 p_1 + s_2 p_2$ に限られる．逆に，$s_1 p_1 + s_2 p_2$ は線型写像 $V_1 \oplus V_2 \to X$ で，(1.1) と分配則より，

$$\begin{aligned} (s_1 p_1 + s_2 p_2) e_1 &= s_1 p_1 e_1 + s_2 p_2 e_1 = s_1 1 + s_2 0 = s_1, \\ (s_1 p_1 + s_2 p_2) e_2 &= s_1 p_1 e_2 + s_2 p_2 e_2 = s_1 0 + s_2 1 = s_2 \end{aligned}$$

となる． □

積の図式と余積の図式を見比べると，矢印がすべて反転している．これが，余積が「余」積とよばれる理由である．

次に，双積が直和とよばれることを，部分空間の言葉を用いて納得する．記号として，線型空間 W の部分空間 V_1, V_2 に対し，

$$V_1 + V_2 \coloneqq \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$$

と定義する．$V_1 + V_2$ は W の部分空間である．

双積 $V_1 \oplus V_2$ は，2 つの部分空間

$$V_1' \coloneqq \{(v_1, 0) \mid v_1 \in V_1\} \cong V_1, \quad V_2' \coloneqq \{(0, v_2) \mid v_2 \in V_2\} \cong V_2$$

をもつ．このとき，その共通部分 $V_1' \cap V_2'$ は自明な線型空間 0 で，その和 $V_1' + V_2'$ は $V_1 \oplus V_2$ に一致する．この事実は，双積を次の方法で特徴付ける．

命題 1.3.6. 線型空間 W が，

$$V_1 \cap V_2 = 0, \quad V_1 + V_2 = W$$

を満たす部分空間 V_1, V_2 をもつとき，ある同型写像 $k\colon V_1 \oplus V_2 \cong W$ が存在して，各合成 $ke_i\colon V_i \to W$ は包含写像 $j_i\colon V_i \hookrightarrow W$ になる．

［証］ 包含写像 $V_1 \xrightarrow{j_1} W \xleftarrow{j_2} V_2$ は，余積の図式の下半を与えるので，ある線型写像 $k\colon V_1 \oplus V_2 \to W$ が存在して，各 ke_i を包含写像にする．

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[dr, "j_1"'] & V_1 \oplus V_2 \arrow[d, dotted, "k"] & V_2 \arrow[l, "e_2"'] \arrow[dl, "j_2"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

この k は，明示的に

$$k(v_1, v_2) = k(e_1 v_1 + e_2 v_2) = k(e_1(v_1)) + k(e_2(v_2)) = v_1 + v_2$$

と書かれる．さて，$k(v_1, v_2) = 0$ のとき，$v_1 = -v_2$ は $V_1 \cap V_2$ の元であるので，仮定より $v_1 = v_2 = 0$ となる．よって，k は単射である．一方，残りの仮定 $V_1 + V_2 = W$ より，k の像は W 全体となるので，k は全射である．従って，k は全単射線型写像であるから，同型写像である． □

双積は結合的である．即ち，線型空間 V_1, V_2, V_3 に対し，対応 $(v_1, (v_2, v_3)) \mapsto ((v_1, v_2), v_3)$ は同型 $V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3) \cong (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3$ を定める．これを以て，3 重の双積 $V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3)$ と $(V_1 \oplus V_2) \oplus V_3$ は同一視され，単に $V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ と書くことが許される．双積の因子が更に増えて，$V_1, \ldots, V_n$ のなす n 重の双積を取ることになっても，この並びのままに双積を取る順番にはどれを選んでもよく，その成果物は

$$\bigoplus_{p=1}^{n} V_p \coloneqq V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

とも表記される．線型空間として陽に書くと，集合は直積集合 $V_1 \times \cdots \times V_n$ で，その上の和とスカラー倍はやはり成分ごと，即ち

$$(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) \coloneqq (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n),$$
$$\kappa(v_1, \ldots, v_n) \coloneqq (\kappa v_1, \ldots, \kappa v_n)$$

で定まる．特に，同じ線型空間 V の n 重の双積は，簡単に V^n とも書かれる．

この構成は，因子が有限個である限り，通用する．因子が無限個になると，これはうまくいかない．

例題 1.3.7. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，V_n を線型空間とする．可算直積集合 $\prod_n V_n$ は，成分ごとの和とスカラー倍

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} + (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (v_n + w_n)_{n\in\mathbb{N}},$$
$$\kappa(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (\kappa v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

によって線型空間をなす．$\prod_n V_n$ は，V_n たちの積だが，余積にはならない．詳細には，次が言える:

- 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して射影 $p_k\colon \prod_n V_n \to V_k$ が適切に定まる．このもとで，線型空間 W と，各 $k \in \mathbb{N}$ に対する線型写像 $t_k\colon W \to V_k$ とを任意に取る．すると，ある線型写像 $t\colon W \to \prod_n V_n$ が唯一存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k \circ t = t_k$ を満たす．つまり，$\prod_n V_n$ と p_k は積の普遍性を満たす．
- 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，線型写像 $e_k\colon V_k \to \prod_n V_n$ が，$e_k(v_k) \coloneqq (\delta_{nk} v_k)_{n\in\mathbb{N}}$（つまり，第 k 項が v_k で残りはすべて 0 の列．δ_{nk} はクロネッカーのデルタ）によって定まる．しかし，ある線型空間 X と，各 $k \in \mathbb{N}$ に対するある線型写像 $s_k\colon V_k \to X$ とが存在して，次を満たす: 「任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $s \circ e_k = s_k$」を満たす線型写像 $s\colon \prod_n V_n \to X$ が少なくとも 2 つ存在する．つまり，$\prod_n V_n$ と e_k は余積の普遍性を満たさない．[*1]

言い換えると，因子空間が無限個あるとき，その積と余積は一致しない．

[*1] ヒント: X に来るのは，本来 V_n たちの余積とよばれるべき線型空間である．自由空間を K^X ではなく $K^{(X)}$ にした動機と，命題 1.2.5 を思い出せ．

2　テンソル積

2.1　双線型写像

線型空間のテンソル積を扱う前に，双線型写像の概念に触れておく．

定義 2.1.1. V, W, X を線型空間とする．直積集合 $V \times W$ から X への**双線型写像**とは，写像 $f\colon V \times W \to X$ であって，

$$\begin{aligned} f(\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2, w) &= \kappa_1 f(v_1, w) + \kappa_2 f(v_2, w), \\ f(v, \kappa_1 w_1 + \kappa_2 w_2) &= \kappa_1 f(v, w_1) + \kappa_2 f(v, w_2) \end{aligned}$$

を常に共に満たすもの，つまり，各変数に関して線型であるようなものをいう．

注意 2.1.2. 双線型写像 $f\colon V \times W \to X$ と，線型写像 $g\colon V \oplus W \to X$ は，全く異なる概念である．実際，スカラー倍に対する振る舞いを見るだけでも，

$$\begin{aligned} \kappa f(v, w) &= f(\kappa v, w), \\ \kappa g(v, w) &= g(\kappa v, \kappa w) \end{aligned}$$

となる．つまり，直積集合上の双線型写像は一般に双積上の線型写像とはならないし，その反対に，双積上の線型写像は一般に直積集合上の双線型写像ともならない．

例えば，線型空間 V に対し，和 $V \times V \to V; (v, w) \mapsto v + w$ は双線型写像とは限らない．実際，$V \neq 0$ のもとで非零元 $w \in V$ を一つ取ると，

$$f(w, w) = 2w \neq 3w = f(0, w) + f(w, w)$$

である．

一方，スカラー倍 $h_0\colon K \times V \to V; (\kappa, v) \mapsto \kappa v$ は双線型写像である．また，この h_0 は，$K \times V$ 上の双線型写像のなかでも一際目立っている．

命題 2.1.3. V を線型空間とする．この $h_0\colon K \times V \to V$ は，$K \times V$ 上の双線型写像の中で普遍的である：任意の線型空間 W と任意の双線型写像 $h\colon K \times V \to W$ に対し，ある線型写像 $t\colon V \to W$ が唯一存在して，$t \circ h_0 = h$ を満たす．

［証］　次の図式の h_0, h は所与である．

$$\begin{tikzcd} K \times V \arrow[r, "h_0"] \arrow[dr, "h"'] & V \arrow[d, dotted, "t"] \\ & W \end{tikzcd}$$

写像 $t\colon V \to W$ を，$v \in V$ に対して $t(v) := h(1, v)$ で定義する．h の双線型性から t は線型写像である．また，任意の $(\kappa, v) \in K \times V$ に対して $(t \circ h_0)(\kappa, v) = t(\kappa v) = h(1, \kappa v) = h(\kappa, v)$ であるから，$t \circ h_0 = h$ を満たす．これで t の存在を言えた．

線型写像 $t'\colon V \to W$ を，$t' \circ h_0 = h$ を満たすよう任意に取る．このとき，任意の $v \in V$ に対して $t'(v) = (t' \circ h_0)(1, v) = h(1, v) = (t \circ h_0)(1, v) = t(v)$ である．よって，$t = t'$ が成り立つ．これで t の一意性も言えた．　□

一般に，同じ意味で普遍的な，$K^m \times V$ 上の双線型写像 $h_0\colon K^m \times V \to V^m$ も存在する．$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ を K^m の標準基底

$$\varepsilon_1 = (1,0,0,\ldots,0,0),\ \varepsilon_2 = (0,1,0,\ldots,0,0),\ \ldots,\ \varepsilon_m = (0,0,0,\ldots,0,1)$$

とすると，K^m の元はスカラー $\kappa_i \in K$ による線型結合で $\kappa_1\varepsilon_1 + \cdots + \kappa_m\varepsilon_m$ と書かれる．このとき，

$$h_0\left(\sum_{i=1}^{m} \kappa_i\varepsilon_i, v\right) \coloneqq (\kappa_1 v, \ldots, \kappa_m v)$$

で双線型写像 $h_0\colon K^m \times V \to V^m$ が定まる．

例題 2.1.4. V を線型空間とする．この $h_0\colon K^m \times V \to V^m$ は，$K^m \times V$ 上の双線型写像の中で普遍的である：任意の線型空間 W と任意の双線型写像 $h\colon K^m \times V \to W$ に対し，ある線型写像 $t\colon V^m \to W$ が唯一存在して，$t \circ h_0 = h$ を満たす．

これら 2 つの観察は，線型空間のテンソル積の簡単な例を，後々与えることになる．

2.2 構成

係数体 K と線型空間 V の直積集合 $K \times V$ 上の普遍的な双線型写像が存在した．となれば，線型空間 V と W の直積集合 $V \times W$ 上の双線型写像にも，同じような意味で普遍的なものがあっても不思議ではない．つまり，そのような写像が仮に存在したとして，適当な線型空間 X を一つ取り $\otimes\colon V \times W \to X$ とおくと，これは任意の線型空間 Z と双線型写像 $h\colon V \times W \to Z$ に対して，次の図式を可換にする線型写像 $t\colon X \to Z$ を唯一もつはずである．

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "h"'] & X \arrow[d, dotted, "t"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

このとき，同じ普遍性をもつ線型空間は同型を除いて一つしかない．つまり，$\otimes'\colon V \times W \to Y$ を，$V \times W$ 上の新たな普遍的双線型写像とすると，同型写像 $\theta\colon X \to Y$ であって，$\theta \circ \otimes = \otimes'$ を満たすものが唯一存在する．しかし，この事実は，そのような X が実際に存在するかどうかとは全く関係ない．存在は，我々で示さねばならない．

V と W を線型空間とする．F を，直積集合 $V \times W$ 上の自由空間 $F \coloneqq K^{(V \times W)}$ とする．このとき，F が伴う写像 $\varepsilon\colon V \times W \to F$ は，$V \times W$ から線型空間への写像の中で普遍的である（定理 1.2.3）．一方，ε は双線型写像とは限らないから，特に $V \times W$ から線型空間への双線型写像の中では普遍的でない．例えば，$W \neq 0$ のもと非零元 $w \in W$ を一つ取ると，$\varepsilon_{(0,w)} \neq \varepsilon_{(0,0)} + \varepsilon_{(0,w)}$ である．ε を双線型写像にしたければ，この両辺を同一視しなければならない．そうなると，F を何らかの部分空間 $S \subseteq F$ で割り，商空間 F/S を作ることになる．そこで，$S \subseteq F$ を，

$$\varepsilon_{(\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2, w)} - \kappa_1\varepsilon_{(v_1,w)} - \kappa_2\varepsilon_{(v_2,w)}, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon_{(v,\kappa_1 w_1 + \kappa_2 w_2)} - \kappa_1\varepsilon_{(v,w_1)} - \kappa_2\varepsilon_{(v,w_2)} \tag{2.2}$$

全体が生成する F の部分空間とする．$p\colon F \to F/S$ を商写像とし，$x \in F$ の同値類を $[x] \coloneqq p(x)$ と書くこと

にすると，

$$\begin{aligned}\left[\varepsilon_{(\kappa_1 v_1+\kappa_2 v_2,w)}\right] &= \left[\kappa_1\varepsilon_{(v_1,w)}+\kappa_2\varepsilon_{(v_2,w)}\right],\\ \left[\varepsilon_{(v,\kappa_1 w_1+\kappa_2 w_2)}\right] &= \left[\kappa_1\varepsilon_{(v,w_1)}+\kappa_2\varepsilon_{(v,w_2)}\right]\end{aligned}$$

である．よって，$p\circ\varepsilon\colon V\times W\to F/S$ は双線型写像である．

定義 2.2.1. V,W を線型空間とする．以上で定まる線型空間 F/S を，V と W の**テンソル積**とよび，$V\otimes W$ で書き表す．双線型写像 $p\circ\varepsilon$ を $\otimes$ と書き，$(v,w)\in V\times W$ の $\otimes$ による像を $v\otimes w\in V\otimes W$ で書き表す．

線型空間 V と W に対し，自由空間 $F=K^{(V\times W)}$ は $\varepsilon_{(v,w)}$ たち全体によって張られたから，テンソル積 $V\otimes W$ は $v\otimes w$ たち全体によって張られる．しかし，これが直ちに基底をなすとは限らない: $\mathbb{R}$ を実線型空間とみて $1,-1\in\mathbb{R}$ を取ると，$1\otimes 1\neq(-1)\otimes 1$ であるが，$1\otimes 1+(-1)\otimes 1=0$ である．また，$V\otimes W$ は $v\otimes w$ たち全体にあくまで<u>張られる</u>のであって，$V\otimes W$ がこのような形の元しかもたないというわけでもない．例えば，K^2 のテンソル積 $K^2\otimes K^2$ において，$\varepsilon_1\otimes\varepsilon_2+\varepsilon_2\otimes\varepsilon_1$ は，単一の $v\otimes w$ の形では書かれない．

それでは，テンソル積の普遍性を確認しよう．

定理 2.2.2. V,W を線型空間とする．テンソル積 $V\otimes W$ と双線型写像 $\otimes\colon V\times W\to V\otimes W$ は，次の普遍性を満たす: 任意の線型空間 X と任意の双線型写像 $h\colon V\times W\to X$ に対し，ある線型写像 $t\colon V\otimes W\to X$ が唯一存在して，任意の $(v,w)\in V\times W$ に対して $t(v\otimes w)=h(v,w)$ を満たす．

［証］ 次の図式の ε,p,h は所与である．

$$\begin{tikzcd}
V\times W \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "h"'] & F \arrow[r, "p"] \arrow[d, dotted, "s"] & F/S \arrow[dl, dotted, "t"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

まず，自由空間の普遍性から，ある線型写像 $s\colon F\to X$ が唯一存在して，$s\circ\varepsilon=h$ を満たす．この s を取る．すると，h の双線型性から，s は (2.1) と (2.2) の形をした S の生成元をすべて 0 に写す．つまり，s の核は S を包含する．よって，商空間の普遍性から，ある線型写像 $t\colon F/S\to X$ が唯一存在して，$t\circ p=s$ を満たす．この t を取ると，$tp\varepsilon=h$ であるから，任意の $(v,w)\in V\times W$ に対して $t(v\otimes w)=h(v,w)$ が成り立つ． □

双線型写像 $h\colon V\times W\to X$ があれば，ある線型写像 $t\colon V\otimes W\to X$ が唯一存在し，$t(v\otimes w)=h(v,w)$ を満たす．その逆に，$t\colon V\otimes W\to X$ を線型写像とすると，$h(v,w):=t(v\otimes w)$ で定まる写像 $h\colon V\times W\to X$ は双線型となる．この意味で，線型空間のテンソル積は，双線型写像の議論を線型写像の議論に帰着させる．

線型空間のみならず，2 つの線型写像 $s\colon V\to V'$ と $t\colon W\to W'$ に対しても，s と t の「テンソル積」に相当する線型写像

$$s\otimes t\colon V\otimes W\to V'\otimes W'$$

が考えられる．まず，$\otimes\colon V'\times W'\to V'\otimes W'$ は双線型写像であるから，対応 $(v,w)\mapsto s(v)\otimes t(w)$ は双線型写像 $V\times W\to V'\otimes W'$ である．よって，$\otimes\colon V\times W\to V\otimes W$ の普遍性から，ある線型写像 $s\otimes t\colon V\otimes W\to V'\otimes W'$ が唯一存在して，$(s\otimes t)(v\otimes w)=s(v)\otimes t(w)$ を満たす．

定義 2.2.3. V,V',W,W' を線型空間，$s\colon V\to V'$，$t\colon W\to W'$ を線型写像とする．以上で定まる線型写像 $s\otimes t\colon V\otimes W\to V'\otimes W'$ を，s と t の**テンソル積**とよぶ．

テンソル積の因子を同型な別の空間に取り替えても，定まるテンソル積は（同型という意味で）同じものとなる．その際に現れるテンソル積を渡る同型写像には，しかるべきものが出てくる．

命題 2.2.4. V, V', W, W' を線型空間とし，$f\colon V \cong V'$, $g\colon W \cong W'$ を同型写像とする．このとき，f と g のテンソル積 $f \otimes g\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ は同型写像である．

［証］ 2 つの写像

$$h\colon V \times W \to V' \otimes W',\ h(v, w) = f(v) \otimes g(w),$$
$$h'\colon V' \times W' \to V \otimes W,\ h'(v', w') = f^{-1}(v') \otimes g^{-1}(w')$$

は，共に双線型写像で，次の図式に現れる:

$$\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f\times g"'] \arrow[dr, "h"] & V \otimes W \arrow[d, dotted, "s"] \\
V' \times W' \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f^{-1}\times g^{-1}"'] \arrow[dr, "h'"] & V' \otimes W' \arrow[d, dotted, "t"] \\
V \times W \arrow[r, "\otimes"] & V \otimes W,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\otimes"'] & V \otimes W \arrow[d, "ts"] \\
 & V \otimes W,
\end{tikzcd}$$

$$\text{where}\quad (f \times g)(v, w) = (f(v), g(w)), \quad (f^{-1} \times g^{-1})(v', w') = (f^{-1}(v'), g^{-1}(w')).$$

よって，上 2 行のテンソル積の普遍性から，ある線型写像 $s\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ と $t\colon V' \otimes W' \to V \otimes W$ がそれぞれ唯一存在して，$s(v \otimes w) = h(v, w)$ および $t(v' \otimes w') = h'(v', w')$ を満たす．この s と t を取る．すると，$(t \circ s)(v \otimes w) = v \otimes w$ となる．一方，再びテンソル積の普遍性から，$u(v \otimes w) = v \otimes w$ を満たす線型写像 $u\colon V \otimes W \to V \otimes W$ は唯一で，実際に $\mathrm{id}_{V \otimes W}$ を取れる．よって，$t \circ s = \mathrm{id}_{V \otimes W}$ である．全く同様にして，$s \circ t = \mathrm{id}_{V' \otimes W'}$ である．従って，s は同型写像で，$s(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$ を満たす．この s は，$f \otimes g$ に他ならない． □

さて，$\otimes$ は $V \times W$ 上の双線型写像である．また，前節にて，簡単な直積集合 $K \times V$ 上の普遍的な双線型写像を一つ例示した（命題 2.1.3）．よって，線型空間 V に対して，同型写像

$$\varphi\colon K \otimes V \cong V,\ \varphi(\kappa \otimes v) = \kappa v$$

が存在する．同様に，例題 2.1.4 より，同型写像

$$\theta\colon K^m \otimes V \cong V^m,\ \theta((\kappa_1, \ldots, \kappa_m) \otimes v) = (\kappa_1 v, \ldots, \kappa_m v)$$

が存在する．言い換えると，φ は K と V のテンソル積が V であると，θ は K^m と V のテンソル積が V^m であると，それぞれ確定する．V が有限次元のとき，$K \otimes V$ や $K^m \otimes V$ の基底は，この同型写像 φ と θ が与えてくれる．同じことが，有限次元線型空間の組に対しても言える．

命題 2.2.5. V, W を有限次元線型空間とし，$\{v_1, \ldots, v_m\}$ を V の基底，$\{w_1, \ldots, w_n\}$ を W の基底とする．このとき，$V \otimes W$ は mn 元集合 $\{v_i \otimes w_j \mid 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ を基底にもつ．よって，特に

$$\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$$

が成り立つ．

［証］ 同型 $V \cong K^m$，$W \cong K^n$ が成り立つ．すると，先の θ は同型写像 $\theta_0\colon V \otimes W \cong (K^n)^m$ を与える．ここで，$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ を K^n の標準基底とすると，$(K^n)^m$ の基底に，第 i 成分に ε_j が現れる $(0, \dots, 0, \varepsilon_j, 0, \dots, 0)$ 全体の mn 元を取れる．これはまさに，$v_i \otimes w_j$ を θ_0 で写した像に他ならない． □

2.3 多重テンソル積

テンソル積は，一回のみならず，複数回取ることもできる．そうしてできる多重テンソル積が，再びしかるべき普遍性を有することを期待してもよいだろう．

定義 2.3.1. $V_1, \dots, V_k, W$ を線型空間とする．直積集合 $V_1 \times \cdots \times V_k$ から W への k **重線型写像**，または単に**多重線型写像**とは，写像 $V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ であって，各変数に関して線型であるようなものをいう．

$k = 1$ のものを単に線型写像，$k = 2$ のものを双線型写像とよんでいた．以下，$k = 3$ のものを**鼎線型写像**とよぶことにする．

どの順番で 3 重（2 回）のテンソル積を取ってもよいとわかれば，多重テンソル積でもそうなる．つまり，同型 $V \otimes (W \otimes X) \cong (V \otimes W) \otimes X$ が得られれば，それ以上の多重テンソル積を，どの順番で何重取ろうとも，因子の並びが同じものはすべて同型になることがわかる．例えば，4 重テンソル積であれば，

$$V \otimes (W \otimes (X \otimes Y)), \dots, (V \otimes W) \otimes (X \otimes Y), ((V \otimes W) \otimes X) \otimes Y$$

の全部が同型になる．今まで同型の違いを無視していたことを思い出すと，例えば 4 重テンソル積を，ここに現れる 2 対の括弧を全く廃して $V \otimes W \otimes X \otimes Y$ と書くことが，無意味でなくなる．

同一の普遍性をもつ対象は，すべて同型なのであった．そこで，同型 $V \otimes (W \otimes X) \cong (V \otimes W) \otimes X$ を確認するために，同型写像を具体的に作ってそれが本当に同型写像であることを見るのではなく，2 回テンソル積を取る写像 $V \times W \times X \to V \otimes (W \otimes X)$ が $V \times W \times X$ 上の鼎線型写像の中で普遍的であることを見ることにする．残りの方法が誘導する写像も，これと全く同様にして普遍的な鼎線型写像となることがわかる．こうして得られる同型写像は，その振る舞い故に，「標準的」あるいは「天与 (canonical)」と形容される．

命題 2.3.2. V, W, X を線型空間とする．写像 $V \times W \times X \to V \otimes (W \otimes X); (v, w, x) \mapsto v \otimes (w \otimes x)$ は，$V \times W \times X$ から線型空間への鼎線型写像の中で普遍的である: 任意の線型空間 Y と任意の鼎線型写像 $h\colon V \times W \times X \to Y$ に対し，ある線型写像 $t\colon V \otimes (W \otimes X) \to Y$ が唯一存在して，$t(v \otimes (w \otimes x)) = h(v, w, x)$ を満たす．

［証］ $(v, w) \mapsto v \otimes w$ は双線型だったので，写像 $(v, w, x) \mapsto v \otimes (w \otimes x)$ は鼎線型である．以下，これが普遍的であることを示す．

$v \in V$ を固定する．このとき，$h(v, -, -)$ は双線型写像 $W \times X \to Y$ なので，$W \otimes X$ の普遍性から，ある線型写像 $s_v\colon W \otimes X \to Y$ が唯一存在して，$s_v(w \otimes x) = h(v, w, x)$ を満たす．次に，V 上の線型結合 $\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2$ を考える．これは 2 つの写像 $s_{\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2}$ と $\kappa_1 s_{v_1} + \kappa_2 s_{v_2}$ を定めるが，これらは共に $\mathrm{Hom}(W \otimes X, Y)$ の元で，$w \otimes x$ を $h(\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2, w, x)$ に写す．よって，$W \otimes X$ の普遍性から，これらは一致する．つまり，$v \mapsto s_v$ は線型写像である．従って，双線型写像 $s\colon V \times (W \otimes X) \to Y; (v, w \otimes x) \mapsto s_v(w \otimes x)$ は，次の図

式の左半を可換にする:

$$\begin{tikzcd} V \times W \times X \arrow[r, "1\times\otimes"] \arrow[dr, "h"'] & V \times (W \otimes X) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, dotted, "s"] & V \otimes (W \otimes X) \arrow[dl, dotted, "t"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

$$\text{where}\quad (1\times\otimes)(v,w,x) = (v, w\otimes x).$$

$\otimes\colon V \times (W\otimes X) \to V\otimes(W\otimes X)$ の普遍性から，ある線型写像 $t\colon V\otimes(W\otimes X)\to Y$ が唯一存在して，$t(v\otimes(w\otimes x)) = s_v(w\otimes x)$ を満たす．この t が，$t(v\otimes(w\otimes x)) = h(v,w,x)$ を満たす． □

系 2.3.3. V, W, X を線型空間とする．対応 $v\otimes(w\otimes x)\mapsto(v\otimes w)\otimes x$ は同型写像 $V\otimes(W\otimes X)\cong(V\otimes W)\otimes X$ を定める．

［証］ 命題 2.3.2 から，$(v,w,x)\mapsto v\otimes(w\otimes x)$ は $V\times W\times X$ 上の普遍的な鼎線型写像である．同様に，$(v,w,x)\mapsto(v\otimes w)\otimes x$ もまた普遍的な鼎線型写像である．

$$\begin{tikzcd} V \times W \times X \arrow[r, "\otimes\circ(1\times\otimes)"] \arrow[dr, "\otimes\circ(\otimes\times 1)"'] & V \otimes (W \otimes X) \arrow[d, dotted, "\cong"] \\ & (V\otimes W)\otimes X \end{tikzcd}$$

よって，$V\otimes(W\otimes X)$ から $(V\otimes W)\otimes X$ への線型写像で $v\otimes(w\otimes x)$ を $(v\otimes w)\otimes x$ に写すものが唯一存在する．これは同型写像である． □

この同型写像を以て，2 元 $v\otimes(w\otimes x)$ と $(v\otimes w)\otimes x$ は同一視され，括弧を外して単に $v\otimes w\otimes x$ と書かれる．空間についても，単に $V\otimes W\otimes X$ と表記することが，斯くして許される．以降，再帰的に一般の k 重テンソル積 $V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ と写像 $(v_1,\dots,v_k)\mapsto v_1\otimes\cdots\otimes v_k$ を定義でき，この写像 $V_1\times\cdots\times V_k\to V_1\otimes\cdots\otimes V_k$ が，$V_1\times\cdots\times V_k$ 上の k 重線型写像として普遍的であることを証明できる．即ち，任意の線型空間 W と任意の k 重線型写像 $h\colon V_1\times\cdots\times V_k\to W$ に対し，ある線型写像 $t\colon V_1\otimes\cdots\otimes V_k\to W$ が唯一存在して，

$$t(v_1\otimes\cdots\otimes v_k) = h(v_1,\dots,v_k)$$

を満たす．各因子空間が有限次元のとき，k 重テンソル積の基底も再帰的な計算で求めることができ，積の次元は次元の積になる．多重テンソル積の定義は，これで済んだ．

テンソル積の構成は，一般に可換環上の加群に対しても行うことができる．その際，商加群や自由加群の普遍性も同様に現れる．

3　多元環

3.1　多元環

線型空間 V の元 $v, w \in V$ に対し，そのテンソル積 $v \otimes w$ を取る操作が考えられる．他にも，元のテンソル積 $v_1 \otimes v_2$ と $v_3 \otimes v_4$ 同士の更にテンソル積 $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes v_4$ を取ることもできる．これに限らず，線型空間は乗法を備えていることがある．

定義 3.1.1. 線型空間 A は，双線型写像 $m\colon A \times A \to A$ と元 $1 \in A$ を備え，次の 2 条件を満たすとき，K 上の**多元環**または**（結合）代数**とよばれる．代数 A は，この m を明示するとき (A, m) とも書かれる．

(A1) m は結合的である．即ち，任意の $a_1, a_2, a_3 \in A$ に対して

$$m(a_1, m(a_2, a_3)) = m(m(a_1, a_2), a_3)$$

を満たす．

(A2) 1 は乗法 m の単位元である．即ち，任意の $a \in A$ に対して

$$m(1, a) = a = m(a, 1)$$

を満たす．

m による積は，$a_1 a_2 \coloneqq m(a_1, a_2)$ と略記されることが多い．環論の言葉に直せば，可換環 K 上の**代数** A とは，K-加群でもあるような（単位的）環であって，環の加法が加群の加法であり，かつ，任意の $a_1, a_2 \in A$ と $\kappa \in K$ に対して

$$\kappa(a_1 a_2) = (\kappa a_1) a_2 = a_1 (\kappa a_2)$$

を満たすもののことをいう．

多元環は環であるから，環論の言葉をいくつか借用できる．以降，単に代数といえば，K 上の代数を指すものとする．

定義 3.1.2. A, A' を代数とする．また，それぞれの単位元を $1 \in A$，$1' \in A'$ とする．

(1) 線型写像 $f\colon A \to A'$ は，任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$$

を満たし，更に $f(1) = 1'$ を満たすとき，**代数準同型（写像）**とよばれる．代数準同型とは，K-加群準同型でも環準同型でもあるような写像 $A \to A'$ のことをいう．

(2) 代数準同型 $f\colon A \to A'$ は，全単射であるとき，**代数同型（写像）**とよばれる．なお，代数同型の逆写像は確かに代数準同型である．A と A' の間に代数同型が存在するとき，A と A' は**同型**であるという．

(3) 線型部分空間 $D \subseteq A$ は，任意の $a \in A$，$d \in D$ に対して $ad \in D$ かつ $da \in D$ を満たすとき，A の**イデアル**とよばれる．可換環 K をそれ自身 K-加群と見たとき，K の（両側）イデアルは K の部分加群となるから，代数 A のイデアルは，単に環としての A のイデアルに相違ない．

例 3.1.3.

- V を線型空間とする．線型写像 $V \to V$ 全体 $\mathrm{End}(V) \coloneqq \mathrm{Hom}(V, V)$ は，点ごとの和とスカラー倍によって線型空間をなす．また，乗法を写像の合成で定めると，$\mathrm{End}(V)$ は代数となる．特に環をなすので，$\mathrm{End}(V)$ は V の**自己準同型環**とよばれる．$\mathrm{End}(V)$ のうち像の次元 $\dim \mathrm{im}\, f$ が有限な元 f 全体のなす集合 $\mathrm{FEnd}(V)$ は，$\mathrm{End}(V)$ のイデアルである．
- n を正の整数とする．K 成分の $n \times n$ 行列全体 $M_n(K)$ は，通常の行列の和・積・スカラー倍によって，代数となる．$M_n(K)$ は K 上の n 次**全行列環**などとよばれる．また，$A \in M_n(K)$ に対し，線型写像 $t_A\colon K^n \to K^n$ を $t_A(x) = Ax$ で定められるが，この対応 $A \mapsto t_A$ は代数同型 $M_n(K) \cong \mathrm{End}(K^n)$ を与える．*2
- $K[x]$ を，x を変数とする K 係数一変数多項式全体の集合とする．$K[x]$ は，通常の多項式の和・積・スカラー倍によって，代数となる．特に環をなすので，$K[x]$ は K 係数一変数**多項式環**とよばれる．（非自明なイデアルを一つ挙げよ．）

次の事実は，今のうちに見ておくと都合がよい．

例題 3.1.4. A, A' を代数，$f\colon A \to A'$ を代数準同型とする．f の核は A のイデアルである．

命題 3.1.5. A を代数，I を集合とし，$(D_i)_{i\in I}$ を A のイデアルの族とする．このとき，

$$D \coloneqq \bigcap_{i\in I} D_i$$

も A のイデアルである．なお，$I = \emptyset$ のときは $D = A$ とする．

［証］ $a \in A$ と $d \in D$ を任意に取る．このとき，任意の $i \in I$ に対して，$d \in D_i$ であるから，$ad, da \in D_i$ である．よって，$ad, da \in D$ である．従って，D は A のイデアルである． □

これは，一般の（可換とは限らない）環に対しても成り立つ: 左イデアルの族の共通部分は左イデアル，右イデアルの族の共通部分は右イデアルである．

P を，代数 A に関する，共通部分で閉じている条件とする．このとき，P を満たす A のイデアル全体の共通部分を取ることで，P を満たすイデアルの中で包含関係に関して最小なものを取ることができる．

定義 3.1.6. A を代数とし，$X \subseteq A$ とする．このとき，X を包含するような A のイデアルの中で最小なものを，X で**生成されるイデアル**とよぶ．

A を代数，D をそのイデアルとする．このとき，線型空間としての商空間 A/D が考えられる．ここに，A から誘導される積が入ることを確かめよう．写像 $\bar{m}\colon A/D \times A/D \to A/D$ を，$[x], [y] \in A/D$ に対し，

$$\bar{m}([x], [y]) = [x][y] \coloneqq [xy] = [m(x, y)]$$

で定義する．$x', y' \in A$ を，$[x] = [x']$ かつ $[y] = [y']$ を満たすよう任意に取る．このとき，ある $d, e \in D$ が存在して，$x' = x + d$ と $y' = y + e$ をそれぞれ満たす．この d と e を一つずつ取る．すると，

$$[x'y'] = [(x + d)(y + e)] = [xy + xe + dy + de] = [xy]$$

*2 両側イデアルに自明なもの（0 と R 自身）しかもたない環 R を**単純環**という．$M_n(K)$ はすべて単純環で，それと代数同型な $\mathrm{End}(K^n)$ も，よって有限次元線型空間 V に対する $\mathrm{End}(V)$ も，単純環である．一方，V が可算無限次元のとき，$\mathrm{FEnd}(V)$ は，$\mathrm{End}(V)$ の唯一の非自明な両側イデアルとなる [2]．

である．よって，$\bar{m}$ は well-defined である．また，m の結合性と双線型性から，$\bar{m}$ の結合性と双線型性が従う．更に，$\bar{m}$ は $[1] \in A/D$ を単位元にもつ．以上より，A/D は $\bar{m}$ を乗法にもつ代数となる．

定義 3.1.7. A を代数，D をそのイデアルとする．以上で定まる A/D を，A の D による**商多元環**，または**商代数**とよぶ．

剰余環 A/D を作る際，K-加群 A を K-加群 D で割る操作も自動的に行っているから，商代数とは剰余環のことである．

代数の積は双線型写像であるから，代数の定義にテンソル積が隠れていそうだという直感がはたらく．これは実際に当を得ている．まず，代数 A の乗法 m は双線型写像 $A \times A \to A$ であるから，テンソル積の普遍性から，線型写像 $\pi\colon A \otimes A \to A$ が唯一存在して，$\pi(a_1 \otimes a_2) = m(a_1, a_2)$ を満たす．次に，m の乗法単位元 $1 \in A$ は，線型写像 $u\colon K \to A$ を $u(\kappa) = 1\kappa$ で定める．この π と u を用いて，代数の定義にある 2 条件を書き換えていく．

まず，3 項積 $a(bc)$ は，π を用いて

$$a(bc) = \pi(a \otimes bc) = \pi(a \otimes \pi(b \otimes c)) = \pi(1 \otimes \pi)(a \otimes b \otimes c)$$

と書かれる．ここに，$1\colon A \to A$ は恒等写像で，$1 \otimes \pi\colon A \otimes A \otimes A \to A \otimes A$ は（右半を約する）写像のテンソル積である．一方，別の結合での 3 項積 $(ab)c$ は

$$(ab)c = \pi(ab \otimes c) = \pi(\pi(a \otimes b) \otimes c) = \pi(\pi \otimes 1)(a \otimes b \otimes c)$$

となる．よって，乗法 m の結合性 $a(bc) = (ab)c$ は，次の図式の可換性に換言される．

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "1\otimes\pi"] \arrow[d, "\pi\otimes 1"'] & A \otimes A \arrow[d, "\pi"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\pi"] & A \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

また別に，$1 \in A$ が A の左乗法単位元であることから，

$$\kappa a = \kappa(1a) = (\kappa 1)a = \pi(\kappa 1 \otimes a) = \pi(u(\kappa) \otimes a) = \pi(u \otimes 1)(\kappa, a)$$

が成り立つ．一方，命題 2.1.3 と同じ標準的な線型同型写像 $\varphi\colon K \otimes A \to A$ により，κa は $\varphi(\kappa \otimes a)$ とも書かれる．よって，1 が左乗法単位元であることは，次の図式の左半の可換性へと換言される．

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "u\otimes 1"'] & A \arrow[d, "1"] & A \otimes K \arrow[l, "\varphi'"'] \arrow[d, "1\otimes u"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\pi"] & A & A \otimes A \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

右半の可換性は，$1 \in A$ が A の右乗法単位元であること $a\kappa = (a1)\kappa$ から，同様に従う．ここに，$\varphi'\colon A \otimes K \to A$ も標準的な同型 $\varphi'(a \otimes \kappa) = a\kappa$ である．

これで，代数の公理は図式の言葉に言い換えられた．この翻訳は，逆向きも可能である．

例題 3.1.8. 線型空間 A が，次の 2 つの線型写像

$$\pi\colon A \otimes A \to A, \quad u\colon K \to A$$

を備え，図式 (3.1) と (3.2) を可換ならしめているとする．このとき，A は乗法を $a_1a_2 \coloneqq \pi(a_1 \otimes a_2)$，乗法単位元を $u(1)$ で備える代数となる．

特に，代数に対する π と u の定義を思い出すと，代数はすべてこの形で現れる，とわかる．つまり，線型空間 A が代数であることの定義を，定義 3.1.1 の代わりに，「図式 (3.1) と (3.2) を可換にする 2 つの線型写像 $\pi\colon A \otimes A \to A$ と $u\colon K \to A$ を備えたもの」としても，もとの定義と全く同じ概念が定まる．この事実は，後ほど想起される．

3.2 次数付き線型空間

一般の「元の p 項テンソル積と q 項テンソル積の更にテンソル積」を一度に扱うためには，線型空間の様々なテンソル積 $V, V \otimes V, V \otimes V \otimes V, \ldots$ をひとまとめにする方法がなければならない．そこで，線型空間に次数の概念を導入する．

定義 3.2.1. **次数付き線型空間**とは，線型空間の列

$$G = (G_0, G_1, G_2, \ldots)$$

のことである．

次数付き線型空間は，可算個の線型空間の直和として定義されることが多いが，ここでは簡単のために，線型空間の列として定義する．K-加群に関しても，**次数付き加群**が加群の列として定義される．

次数付き線型空間には，線型空間に関する言葉が，ほとんどそのまま適用される．

定義 3.2.2. $G = (G_0, G_1, \ldots), G' = (G'_0, G'_1, \ldots)$ を次数付き線型空間とする．

(1) g が G の**元**であるとは，g が何らかの G_p に属することをいい，$g \in G$ で書き表す．G_p の元は G の**次数** p の元とよばれる．G の 2 元の和は，その 2 元の次数 p が等しいときにのみ，G_p における和として定義される．

(2) G の**次数付き部分空間**とは，次数付き線型空間 $S = (S_0, S_1, \ldots)$ で，各 S_p が G_p の部分空間であるようなもののことをいう．G の次数付き部分空間 S, S' に対し，S が S' に**包含される**，または S' が S を**包含する**とは，任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して S_p の各元が S'_p の元であることをいい，$S \subseteq S'$ で書き表す．

(3) **次数付き線型写像** $t\colon G \to G'$ とは，各 $p \in \mathbb{N}$ についての線型写像 $t_p\colon G_p \to G'_p$ がなす列 $(t_0, t_1, \ldots)$ のことである．各 t_p が同型写像であるとき，t は**次数付き同型写像**とよばれる．

(4) $t\colon G \to G'$ を次数付き線型写像とする．t の**像**は，各 $t_p\colon G_p \to G'_p$ の像がなす列（次数付き線型空間）である．t の**核**は，各 t_p の核がなす列（次数付き線型空間）である．

線型空間について当然だった事実は，特に論証を要さず，ここでも成り立つ．

例題 3.2.3. $G = (G_0, G_1, \ldots), G' = (G'_0, G'_1, \ldots), G'' = (G''_0, G''_1, \ldots)$ を次数付き線型空間とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $t\colon G \to G', s\colon G' \to G''$ を次数付き線型写像とする．このとき，その合成 $s \circ t\colon G \to G''$ が，各 $p \in \mathbb{N}$ に対して $(s \circ t)_p \coloneqq s_p \circ t_p$ で定まり，再び次数付き線型写像となる．

(2) G の次数付き部分空間全体の集合上で，$\subseteq$ は半順序となる．特に，S, S' を G の次数付き部分空間とす

るとき，$S \subseteq S'$ かつ $S' \subseteq S$ ならば，S と S' は一致する．

(3) $t\colon G \to G'$ を次数付き線型写像とすると，t の核は G の，t の像は G' の，それぞれ次数付き部分空間である．

線型空間でやったように，商を取ることもできる．

定義 3.2.4. $G = (G_0, G_1, \dots)$ を次数付き線型空間，$S = (S_0, S_1, \dots)$ をその次数付き部分空間とする．G の S による**次数付き商空間** G/S を，各 $p \in \mathbb{N}$ に対する商空間 G_p/S_p の列で定める．G から商 G/S への**射影** $\pi\colon G \to G/S$ は，通常の射影 $\pi_p\colon G_p \to G_p/S_p$ の列である．

例題 3.2.5. 商 G/S と射影 $\pi\colon G \to G/S$ は，次の普遍性を満たす: 任意の次数付き線型空間 H と，核が S を包含するような任意の次数付き線型写像 $f\colon G \to H$ に対し，ある次数付き線型写像 $t\colon G/S \to H$ が唯一存在して，$t \circ \pi = f$ を満たす．

次数付き線型空間 G, H に対しても，そのテンソル積 $G \otimes H$ を作ることができる．次数付き線型空間 $G \otimes H$ の次数 n の部分は，$(n+1)$ 重の双積

$$\begin{aligned}(G \otimes H)_n &\coloneqq \bigoplus_{p+q=n} (G_p \otimes H_q) \\ &= (G_n \otimes H_0) \oplus \cdots \oplus (G_0 \otimes H_n)\end{aligned}$$

で定義される．つまり，$g \in G_p$ と $h \in H_q$ に対し，テンソル積 $g \otimes h$ は $G_p \otimes H_q$ の元であるが，これを $G_p \otimes H_q$ から双積への入射によって $(G \otimes H)_{p+q}$ の元と同一視することになる．例えば，$p = n$ かつ $q = 0$ ならば，$g \otimes h$ は $(g \otimes h, 0, \dots, 0)$ と同一視される．

定義 3.2.6. G, H を次数付き線型空間とする．以上で定義される次数付き線型空間 $G \otimes H$ を，G と H の**テンソル積**とよぶ．

テンソル積と名付けたからには，確認せねばならないことがある．

命題 3.2.7. G, H, M を次数付き線型空間とする．次数付き線型写像 $t\colon G \otimes H \to M$ は，任意の $p, q \in \mathbb{N}$ に対して双線型写像 $t_{p,q}\colon G_p \times H_q \to M_{p+q}$ を $t_{p,q}(g, h) = t(g \otimes h)$ で与える．逆に，すべての $p, q \in \mathbb{N}$ に対して双線型写像 $t_{p,q}\colon G_p \times H_q \to M_{p+q}$ が与えられたとき，ある次数付き線型写像 $t\colon G \otimes H \to M$ が唯一存在して，$t(g \otimes h) = t_{p,q}(g, h)$ を満たす．

［証］ t から構成される各 $t_{p,q}$ は，双線型写像 $\otimes\colon G_p \times H_q \to G_p \otimes H_q$，入射 $G_p \otimes H_q \to (G \otimes H)_{p+q}$，および線型写像 $t_{p+q}\colon (G \otimes H)_{p+q} \to M_{p+q}$ の合成であるから，双線型写像である．

逆に，$t_{p,q}$ のすべてが与えられていたとする．線型空間のテンソル積の普遍性から，各 $p, q \in \mathbb{N}$ に対して，ある線型写像 $s_{p,q}\colon G_p \otimes H_q \to M_{p+q}$ が唯一存在して，$s_{p,q}(g \otimes h) = t_{p,q}(g, h)$ を満たす．次に，因子 $G_p \otimes H_q$ から双積 $(G \otimes H)_{p+q}$ への入射の普遍性から，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，ある線型写像 $t_n\colon (G \otimes H)_n \to M_n$ が唯一存在し，$p + q = n$ を満たす任意の $p, q \in \mathbb{N}$ に対して，$t_n(g \otimes h) = s_{p,q}(g \otimes h)$ を満たす．この t_n のなす列が，所望の次数付き線型写像である． □

証明中で現れた写像たちは，次の図式を可換にする．ここに，$e_{p,q}\colon G_p\otimes H_q\to(G\otimes H)_{p+q}$ は入射である．

$$\begin{tikzcd}
G_p\times H_q \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "t_{p,q}"'] & G_p\otimes H_q \arrow[r, "e_{p,q}"] \arrow[d, dotted, "s_{p,q}"] & (G\otimes H)_{p+q} \arrow[dl, dotted, "t_{p+q}"] \\
 & M_{p+q} &
\end{tikzcd}$$

線型空間でそうであったように，このテンソル積も結合的である．つまり，次数付き線型空間 G,H,M に対し，対応 $g\otimes(h\otimes m)\mapsto(g\otimes h)\otimes m$ は次数付き同型 $G\otimes(H\otimes M)\cong(G\otimes H)\otimes M$ を定める．この同型を以て，$G\otimes(H\otimes M)$ と $(G\otimes H)\otimes M$ は同一視され，単に $G\otimes H\otimes M$ と書かれる．

また，次数付き線型空間は，線型空間の一般化である．

定義 3.2.8. H を次数付き線型空間とする．H が**次数 0 に集中している** (concentrated in degree 0) とは，任意の正整数 n に対して $H_n=0$ であることをいう．

単なる線型空間 H_0 は，次数 0 に集中した次数付き線型空間 $H=(H_0,0,0,\dots)$ と同一視される．この同一視は特に係数体 K についても適用できて，これにより次数付きテンソル積 $G\otimes K$ は

$$(G\otimes K)_n=G_n\otimes K\cong G_n$$

となる．この同型は，次の同一視

$$G\otimes K\cong G,\quad K\otimes G\cong G$$

を正当化する．

3.3 次数付き代数

もう一度，代数の特徴付けを思いだそう．代数 A は，2 つの線型写像 $\pi\colon A\otimes A\to A$ と $u\colon K\to A$ であって，次の 2 つの図式

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "1\otimes\pi"] \arrow[d, "\pi\otimes 1"'] & A\otimes A \arrow[d, "\pi"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\pi"] & A,
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K\otimes A \arrow[r, equal] \arrow[d, "u\otimes 1"'] & A \arrow[r, equal] \arrow[d, "1"] & A\otimes K \arrow[d, "1\otimes u"] \\
A\otimes A \arrow[r, "\pi"] & A & A\otimes A \arrow[l, "\pi"']
\end{tikzcd}
\tag{3.3}$$

をいずれも可換ならしめるものを，それぞれ唯一もつ（右側上行の等号は，件の線型空間の同一視）．また，我々は次数付き線型空間のテンソル積を先ほど構成した．更に，係数体 K が適切な形で次数付き線型空間と見なされることと，次数付き線型空間における類似の同型 $K\otimes A\cong A\cong A\otimes K$ が成立することも見届けた．よって，A を次数付き線型空間に読み替えたとしても，図式 (3.3) は意味をもつ．

定義 3.3.1. **次数付き代数** A とは，次数付き線型空間であって，図式 (3.3) を可換にする 2 つの次数付き線型写像 $\pi\colon A\otimes A\to A$ と $u\colon K\to A$ を備えたもののことをいう．

この定義は，元の言葉を使うことにより，従来の方法で言い換えることもできる．

命題 3.3.2. A を次数付き線型空間とし，元 $1\in A_0$ と，$a,b\in A$ に**積**とよばれる A の元 ab を割り当てる対応とを備え，次の 5 条件を満たしているとする:

(GA1) 任意の $a, b \in A$ に対して，$\operatorname{degree} ab = \operatorname{degree} a + \operatorname{degree} b$ が成り立つ．ここに，$\operatorname{degree} a$ は a の次数．

(GA2) 任意の $a \in A$ と，次数の等しい任意の $b_1, b_2 \in A$ に対して，

$$a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2,$$
$$(b_1 + b_2)a = b_1 a + b_2 a$$

が成り立つ．

(GA3) 任意の $a, b \in A$, $\kappa \in K$ に対して，$\kappa(ab) = (\kappa a)b = a(\kappa b)$ が成り立つ．

(GA4) 任意の $a, b, c \in A$ に対して，$a(bc) = (ab)c$ が成り立つ．

(GA5) 任意の $a \in A$ に対して，$1a = a = a1$ が成り立つ．

このとき，ある次数付き線型写像 $\pi\colon A \otimes A \to A$ と $u\colon K \to A$ が唯一存在して，$\pi(a \otimes b) = ab$ と $u(\kappa) = 1\kappa$ を満たす．これら 2 つの写像を以て，A は次数付き代数をなす．逆に，次数付き代数 A は，$a, b \in A$ に対する積を $ab \coloneqq \pi(a \otimes b)$ で定めることにより，元 $u(1) \in A_0$ と共に，5 条件 (GA1)–(GA5) をすべて満たす．

［証］ 後半を先に示す．A を図式 (3.3) で定義された次数付き代数とする．

(GA1) $a \in A_p$ かつ $b \in A_q$ とすると，$ab = \pi(a \otimes b) \in A_p \otimes A_q$ であるから，$ab \in A_{p+q}$ である．

(GA2) $\otimes\colon A_p \times A_q \to A_p \otimes A_q$ は双線型写像であったから，

$$a(b_1 + b_2) = \pi(a \otimes (b_1 + b_2)) = \pi(a \otimes b_1 + a \otimes b_2) = \pi(a \otimes b_1) + \pi(a \otimes b_2) = ab_1 + ab_2,$$
$$(b_1 + b_2)a = \pi((b_1 + b_2) \otimes a) = \pi(b_1 \otimes a + b_2 \otimes a) = \pi(b_1 \otimes a) + \pi(b_2 \otimes a) = b_1 a + b_2 a$$

である．

(GA3) π は線型写像であるから $\kappa(ab) = \kappa\pi(a \otimes b) = \pi(\kappa(a \otimes b))$ で，再び $\otimes$ の双線型性から

$$\pi(\kappa(a \otimes b)) = \pi((\kappa a) \otimes b)) = \pi(a \otimes (\kappa b))$$

である．よって，$\kappa(ab) = (\kappa a)b = a(\kappa b)$ が成り立つ．

(GA4) (3.3) の左の図式の可換性から，即座に $a(bc) = (ab)c$ が成り立つ．

(GA5) u は次数付き線型写像なので，$u(1)$ は確かに A_0 の元である．また，(3.3) の右の図式の可換性から，即座に $u(1)a = a = au(1)$ が成り立つ．

よって，A は (GA1)–(GA5) をすべて満たす．

前半を示そう．次数付き線型空間 A が (GA1)–(GA5) をすべて満たしているとする．最初の 3 条件は，各写像

$$\rho_{p,q}\colon A_p \times A_q \to A_{p+q}; (a, b) \mapsto ab$$

が双線型写像であることを意味する．よって，命題 3.2.7 から，ある次数付き線型写像 $\pi\colon A \otimes A \to A$ が唯一存在して，任意の $a \in A_p, b \in A_q$ に対して $\pi(a \otimes b) = \rho_{p,q}(a, b)$ を満たす（左辺の $a \otimes b$ は既述の同一視がなされたものであることに注意）．続く次数付き線型写像 $u\colon K \to A$ は，$u_0(\kappa) \coloneqq 1\kappa$ と，各正整数 n に対する唯一の線型写像 $u_n(0) = 0$ によって，やはりただ一つに定まる．あとは図式 (3.3) の可換性だが，これは残りの 2 条件 (GA4) と (GA5) から直ちに従う．よって，A は次数付き代数である． □

次数付き代数の積は，確かに次数と整合するような代数の積である．用語の濫用を許せば，(GA1) は A の乗法の次数との整合; (GA2) と (GA3) は双線型性; (GA4) は結合性; (GA5) は単位元の存在; を意味する．これを以て，次数付き代数は，次数付き線型空間と代数それぞれの構造を両立させる．

代数で定義された言葉は，次数を伴っても同様に定義される．

定義 3.3.3. A, A' を次数付き代数とする．また，それぞれの乗法の単位元を $1 \in A,\ 1' \in A'$ とする．

(1) 次数付き線型写像 $t\colon A \to A'$ は，$t_{p+q}(ab) = t_p(a)t_q(b)$ と $t(1) = 1'$ を満たすとき，**次数付き代数準同型（写像）**とよばれる．

(2) 次数付き部分空間 $D \subseteq A$ は，任意の $a \in A,\ d \in D$ に対して $ad \in D$ かつ $da \in D$ を満たすとき，A の**イデアル**とよばれる．

単一の元 e で生成される線型空間（つまり，1 点集合 $\{e\}$ 上の自由空間）を Ke と書くことにする．

例 3.3.4. 次数付き線型空間 $P = P_K^{(1)}$ を，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $P_{2n+1} = 0$ および $P_{2n} = Kx_n$ で，即ち

$$P \coloneqq (Kx_0, 0, Kx_1, 0, Kx_2, 0, \dots)$$

で定める．P の積を，双線型写像 $Kx_p \times Kx_q \to K_{p+q}; (\kappa x_p, \lambda x_q) \mapsto \kappa\lambda x_{p+q}$ で与える．これは明らかに結合的で，x_0 を単位元にもつ．この P は，1 元生成**次数付き多項式代数**とよばれる．ここで，各 $p \in \mathbb{N}$ に対して $x_p = x_1^p$ が成り立つ．ここに，$x_1^0 = x_0$ とする．よって，$x_0 = 1$ および $x_1 = x$ と設定すると，$x_p = x^p$ で，P は通常の多項式環 $K[x]$ の単項式 κx^p をすべてもつ次数付き代数となる（奇次数の空間を 0 に限った理由は，4 章で明かされる）．

次数付き線型空間として，商空間 A/D とその射影 $\pi\colon A \to A/D$ が考えられたが，これを次数付き代数準同型ならしめる A/D の乗法の定め方は，ちょうど 1 通りだけある．明示的には，$[a], [b] \in A/D$ に対し，その積は $[a][b] \coloneqq [ab]$ で定義される．$a', b' \in A$ を $[a] = [a']$ かつ $[b] = [b']$ を満たすよう任意に取ると，ある $d, e \in D$ が存在して，$a' = a + d$ および $b' = b + e$ を満たす．この d と e を一つずつ取ると，

$$[a'b'] = [(a+d)(b+e)] = [ab + ae + db + de] = [ab]$$

となる．つまり，これで定まる A/D の積は well-defined である．

定義 3.3.5. A を次数付き代数，D をそのイデアルとする．以上で定まる A/D を，A の D による**次数付き商代数**とよぶ．

例題 3.3.6. 次数付き商代数は次数付き代数である．

例 3.3.7. A を次数付き代数とする．$D^{(n)}$ を

$$D^{(n)} \coloneqq (0, \dots, 0, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \dots)$$

で定めると，これは明らかに A のイデアルである．これに対応する次数付き商代数 $A/D^{(n)}$ は，次数 n の**切頂代数** (the algebra A truncated at degree n) とよばれることがある．

商の普遍性は，ここにおいてすら現れる．

例題 3.3.8. A を次数付き代数，D を A のイデアルとする．

(1) A' を次数付き代数，$t\colon A \to A'$ を次数付き代数準同型とする．t の核は A のイデアルである．

(2) 商 A/D と射影 $\pi\colon A \to A/D$ は，次の普遍性を満たす: 任意の次数付き代数 B と，核が D を包含するような任意の次数付き代数準同型 $f\colon A \to B$ に対し，ある次数付き代数準同型 $t\colon A/D \to B$ が唯一存在して，$t \circ \pi = f$ を満たす．

なお，次数付き商代数は，剰余環の概念を包摂している: 可換環 A は加法に関して可換群であるから，自然に $\mathbb{Z}$-加群の，よって $\mathbb{Z}$-代数の構造をもつ．これは周知の方法で次数 0 に集中した $\mathbb{Z}$-次数付き代数と見なされるが，そこでの $\mathbb{Z}$-次数付き商代数 A/D は，剰余環（即ちそれに対応する $\mathbb{Z}$-代数）A/D を次数 0 の部分にもつ $\mathbb{Z}$-次数付き代数となる．

最後に，次数付き代数のイデアルの姿を見ておく．次数付き代数 A のイデアル全体には，次数付き線型空間で見た包含関係が半順序として入る．また，A のイデアルの族の共通部分は（空な族も含めて）再びイデアルとなる．よって，部分集合 $X \subseteq A$（つまり，X は次数付き線型空間としての A の元たちの集合）に対し，X を包含する A のイデアルとして最小のものが取れる．これを A の X で**生成されるイデアル**とよぶ．

命題 3.3.9. A を次数付き代数とし，X を A の元の集合とする．このとき，X で生成される A のイデアル $D = D(X)$ は，D_p に有限和

$$a_1x_1b_1 + a_2x_2b_2 + \cdots + a_nx_nb_n \tag{3.4}$$

全体の集合をもつ．ここに，$a_i, b_i \in A$, $x_i \in X$ で，$a_ix_ib_i$ はすべて次数 p である．

［証］ D_p を有限和 (3.4) 全体のなす集合とすると，これは A_p の（線型）部分空間である．D_p の元 (3.4) に $c \in A_q$ を右からでも左からでも掛けると，積は次数 $p+q$ の元からなる有限和 (3.4) の形になるので，D_{p+q} の元となる．よって，D_p のなす列 D は A のイデアルである．このイデアルは，すべての $x \in X$ を含む．逆に，X を包含するイデアルは積 axb すべてを，よって D の元すべてをもたねばならない．よって，D は X を包含する A のイデアルとして最小である． □

次数付き商代数の普遍性は，射影 $\pi\colon A \to A/D$ が，D 上で（任意の $d \in D$ に対して）$f(d) = 0$ を満たすような次数付き代数準同型 $f\colon A \to B$ の中で普遍的であることを主張した（例題 3.3.8）．そして，命題 3.3.9 が語るに，射影 $\pi\colon A \to A/D(X)$ は，X 上で $f(x) = 0$ を満たすような次数付き代数準同型 $f\colon A \to B$ の中で普遍的である．

4　テンソル代数と外積代数

4.1　テンソル代数

V を線型空間とする．$p \in \mathbb{N}$ に対し，$T^p(V)$ を V の p 重テンソル積 $V \otimes \cdots \otimes V$ とする．ここに，$T^0(V) = K$ である．このもとで，次数付き線型空間

$$\begin{aligned} T(V) &\coloneqq (T^0(V), T^1(V), T^2(V), T^3(V), \dots) \\ &= (K,\ V,\ V \otimes V,\ V \otimes V \otimes V, \dots) \end{aligned}$$

が定義される．

ところで，先にも述べたように，V の元の p 項積に q 項積を続けたものは $(p+q)$ 項積になるが，これは線型同型写像

$$\varphi_{p,q} \colon T^p(V) \otimes T^q(V) \cong T^{p+q}(V)$$

を，次のようにして与える: $p = 0$ のとき，$\varphi_{0,q}$ は命題 2.1.3 が定める同型写像 $K \otimes T^q(V) \cong T^q(V)$ である．$q = 0$ についても同様．$p > 0$ かつ $q > 0$ のとき，直積集合 V^{p+q} 上の写像

$$\begin{aligned} (v_1, \dots, v_p, v'_1, \dots, v'_q) &\mapsto (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q) \in T^p(V) \otimes T^q(V), \\ (v_1, \dots, v_p, v'_1, \dots, v'_q) &\mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q \in T^{p+q}(V) \end{aligned}$$

は，いずれも $(p+q)$ 重線型写像として普遍的である．よって，前者から後者を返すような線型同型写像 $\varphi_{p,q} \colon T^p(V) \otimes T^q(V) \cong T^{p+q}(V)$,

$$\varphi_{p,q}((v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q)) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q$$

が存在する．この同型を以て，$a \in T^p(V)$ と $b \in T^q(V)$ の積を $ab \coloneqq \varphi_{p,q}(a \otimes b)$ で定めることにより，$T(V)$ には次数と整合する乗法が入る．陽に書けば，

$$\begin{aligned} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)(v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q) &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q, \\ \kappa(v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q) &= \kappa v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q, \\ (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)\lambda &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \lambda \end{aligned}$$

となる．この積は，結合的で，$K = T^0(V)$ の単位元を単位元にもつ．

定義 4.1.1. V を線型空間とする．以上で定まる次数付き代数 $T(V)$ を，V の**テンソル代数**とよぶ．

例 4.1.2. V を，$1 \in K$ で生成される線型空間 $K1 = K$ とする．このとき，p 重積 $T^p(K) = K \otimes \cdots \otimes K$ も 1 元生成で，$1 \otimes \cdots \otimes 1$ により生成される．この 1 の p 項積を $y_p \coloneqq 1 \otimes \cdots \otimes 1$ とおくと，各 y_p は $T^p(K)$ の生成元であるが，それらの積は $y_p y_q = y_{p+q}$ となるので，$y_p = y_1^p$ である．よって，$T(K)$ は次数付き代数 $(K, Ky_1, Ky_1^2, Ky_1^3, \dots)$ となる．

例 4.1.3. V を，2 元 a, b で生成される線型空間とする．このとき，$T^2(V)$ は

$$a^2 = a \otimes a,\ ab = a \otimes b,\ ba = b \otimes a,\ b^2 = b \otimes b$$

による 4 元生成の線型空間となる．$ab \neq ba$ に注意．次に，$T^3(V)$ は a^3, a^2b, aba, ab^2, ba^2, bab, b^2a, b^3 の，都合 8 元に生成される．同様に，$T^p(V)$ は，形式的に異なる 2^p 個の p 項積により生成される線型空間とな

る．この状況を形式ばらずに言えば，「$T(V)$ は次数 1 の 2 元 a, b により生成される最も一般的な（非可換）次数付き代数である」．

同じことが，一般の線型空間についても言える．つまり，$T(V)$ は，言い換えれば V によって生成される最も一般的な（非可換）次数付き代数と表現される．数学的な主張に直せば，次のようになる．

定理 4.1.4. V を線型空間，A を次数付き代数とし，A_1 を A の次数 1 の元全体のなす線型空間とする．このとき，任意の線型写像 $s\colon V \to A_1$ に対し，ある次数付き代数準同型 $t\colon T(V) \to A$ が唯一存在して，$t_1 = s$ を満たす．

［証］ 次の図式の u, s は所与である．

$$\begin{tikzcd}
T(V) = \arrow[d, dotted, "t"] & (K, \arrow[d, "u"] & V, \arrow[d, "s=t_1"] & T^2(V), \arrow[d, dotted, "t_2"] & \cdots & T^p(V), \arrow[d, dotted, "t_p"] & \cdots) \\
A = & (A_0, & A_1, & A_2, & \cdots & A_p, & \cdots)
\end{tikzcd}$$

$T(V)$ の単位元は $K = T^0(V)$ の単位元で，$T(V)$ の積はテンソル積である．よって，件の次数付き代数準同型 t は，各スカラー $\kappa \in K$ に対して $t_0(\kappa) = \kappa 1 = u(\kappa)$ と，各 $p > 0$ に対して

$$t_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = (sv_1) \cdots (sv_p)$$

を満たさなければならない．これで t の振る舞いが決定されるので，この t は存在すれば一意的である．逆に，$(v_1, \ldots, v_p) \mapsto (sv_1) \cdots (sv_p)$ は p 重線型写像 $V^p \to A_p$ であり，また $(v_1, \ldots, v_p) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ は普遍的な p 重線型写像である．よって，各 $p > 0$ に対して，線型写像 $t_p\colon T^p(V) \to A_p$ が想定されたとおりに定義される．以上のもとで，t は $t(1) = u(1) = 1$ を満たし，$T(V)$ の積について

$$t_{p+q}((v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)(v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q)) = t_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) t_q(v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q)$$

を満たす．従って，t は $t_1 = s$ を満たす唯一の次数付き代数準同型 $T(V) \to A$ である． □

4.2 外積代数

テンソル代数は，極めて代表的な商をもつ．

定義 4.2.1. V を線型空間とする．テンソル代数 $T(V)$ において，V の元の平方 $v^2 = v \otimes v$ 全体が生成するイデアルを $D(V^2)$ とおく．このもとで，V の**外積代数**を，次数付き商代数

$$\bigwedge(V) \coloneqq T(V)/D(V^2)$$

で定義する．$\bigwedge(V)$ の次数 p の部分を $\bigwedge^p(V)$ で書き表す．2 元 $a, b \in \bigwedge(V)$ の乗法は $(a, b) \mapsto a \wedge b$ と書き，この演算を a と b の**外積**とよぶ．

テンソル代数は（括弧付きで）非可換であると言及されていたが，それは次の意味での可換性を指してのことである．

定義 4.2.2. 次数付き代数 A が**（次数付き）可換**であるとは，任意の 2 元 $a \in A_p,\ b \in A_q$ に対して，

$$ab = (-1)^{pq} ba$$

を満たすことをいう．

確かに，一般にテンソル代数は次数付き代数として非可換で，実際に V が 2 元生成のときに $T(V)$ は非可換であった．一方，例えば例 3.3.4 の 1 元生成次数付き多項式代数 $P_K^{(1)}$ は可換である．また，係数体 K は自然に次数付き代数となったが，やはり可換である．また，次に見るように，外積代数も可換である．

命題 4.2.3. V を線型空間とする．外積代数 $\bigwedge(V)$ は，$\bigwedge^0(V) = K$ を満たし，次数 1 の元全体の集合 $\bigwedge^1(V) = V$ で生成され，可換で，奇次数の元 a の平方 $a \wedge a$ が 0 になる．

［証］ イデアル $D(V^2) = D$ は次数 2 の元 v^2 たちに生成されるから，次数 2 未満の非零元をもたない．よって，

$$\bigwedge^0(V) = T^0(V)/D_0 = T^0(V) = K, \quad \bigwedge^1(V) = T^1(V)/D_1 = T^1(V) = V$$

である．

次に，テンソル代数の元はすべて次数 1 の元の積の和であった．これと全く同じ方法で，外積代数の次数 p の元は，次数 1 の元の p 項積の和で書かれる: 例えば $a = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ と書かれた $a \in T^p(V)$ は，外積代数においては $a = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ と（たとえ $a \in D_p$ であろうともひとまず）書かれる．よって，$\bigwedge(V)$ は V で生成される次数付き代数である．

定義より，$v^2 \in D_2$ 故 $v^2 = v \wedge v = 0$ なので，任意の 2 元 $v_1, v_2 \in V$ は

$$0 = (v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1 + v_2^2 = v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1$$

を満たす．よって，$v_1 \wedge v_2 = -v_2 \wedge v_1$ である．即ち，次数 1 の 2 元は係数 -1 を伴って可換である．ここで，p に関する帰納法によって，

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge v = (-1)^p v \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)$$

が成り立つことを示せる．更に，q に関する帰納法によって，

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (v_1' \wedge \cdots \wedge v_q') = (-1)^{pq}(v_1' \wedge \cdots \wedge v_q') \wedge (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)$$

が成り立つこともわかる（これで結果的に，外積の隣り合う項を入れ替えると -1 倍になる，と判明した）．$\bigwedge(V)$ の次数 p の元は $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ の形の元の和で書かれたので，外積の多重線型性から，任意の $a \in \bigwedge^p(V)$ と $b \in \bigwedge^q(V)$ に対して $a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$ が成り立つことになり，以て $\bigwedge(V)$ の可換性が従う．

最後に，奇次数の元の平方が 0 になることを示す．定義より，これは次数 1 の元に対しては成り立つ．p を奇数とする．$a \in \bigwedge^p(V)$ が $a = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ と単一の p 項積で書かれるとき，$a^2 = a \wedge a$ は積の因子に $v_1 \wedge v_1 = 0$ をもつので，0 になる．a が p 項積の和として $a = a_1 + \cdots + a_k$ と書かれるときは，$\bigwedge(V)$ の可換性と，p^2 が奇数であることから，

$$a^2 = \sum_i a_i^2 + \sum_{i<j} (a_i \wedge a_j + a_j \wedge a_i) = \sum_{i<j} (a_i \wedge a_j - a_i \wedge a_j) = 0$$

となる．これで証明が完了した． □

外積代数においては，単一の積で書ける正偶次数の元の平方も 0 になる．しかし，すべての偶次数の元の平方が 0 になるとは限らない．

例 4.2.4. V を実線型空間 $\mathbb{R}^4$ とし，その標準基底を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ とする．このもとで，$a = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4$ とおくと，$a \in \bigwedge^2(V)$ であるが，

$$a^2 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 + \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \wedge \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \neq 0$$

である（ここで $\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 \neq 0$ を用いたが，これは命題 4.3.9 で示される）．

テンソル代数は，一般の次数付き代数 A に対して，線型写像 $s\colon V \to A_1$ から妥当な唯一の次数付き代数準同型 $t\colon T(V) \to A$ を作り出した．外積代数の場合も似たことが起こる．つまり，外積代数もまた，ある種の次数付き代数の中で普遍的である．

定理 4.2.5. V を線型空間，S を次数 1 の各元 $s \in S_1$ が $s^2 = 0$ を満たす次数付き代数とする．このとき，任意の線型写像 $h\colon V \to S_1$ に対し，ある次数付き代数準同型 $t\colon \bigwedge(V) \to S$ が唯一存在して，$t_1 = h$ を満たす．

［証］ 通常の線型空間 V を次数 1 に集中した次数付き線型空間 $(0, V, 0, 0, \dots)$ と見なすと，所与の線型写像 $h\colon V \to S_1$ は，1 でない次数で零写像であるような次数付き線型写像 $V \to S$ である．同様に，包含写像 $j\colon V \to T(V)$ は次数付き線型写像である．よって，次の図式の h, j, p が所与である．

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dotted, "k"] & \bigwedge(V) \arrow[d, dotted, "t"] \\
V \arrow[u, "j"] \arrow[r, "h"'] & S
\end{tikzcd}$$

テンソル代数の普遍性より，次数付き代数準同型 $k\colon T(V) \to S$ が唯一存在して，下半三角形を可換にする．ここで，$v \in V$ は $k(v) \in S_1$ を含意する．各 $s \in S_1$ に対して $s^2 = 0$ であったから，これは $k(v^2) = 0$ を導く．よって，k の核はすべての平方 v^2 が生成する $T(V)$ のイデアルを包含する．従って，商写像 p の普遍性から，ある次数付き代数準同型 $t\colon \bigwedge(V) \to S$ が唯一存在して，上半三角形を可換にする．この t が所望の準同型である． □

テンソル代数の次数 p の部分 $T^p(V)$ は，普遍的な p 重線型写像を生み出した．その商たる，外積代数の次数 p の部分 $\bigwedge^p(V)$ も，ある種の p 重線型写像の中で普遍的なものを生み出すであろうと期待される．

定義 4.2.6. V, W を線型空間とする．p 重線型写像 $h\colon V^p \to W$ が**交代的**であるとは，ある 2 つの変数 v_i, v_j $(i \neq j)$ が一致するときに，その値 $h(v_1, \dots, v_p)$ が 0 になることをいう．

$v \wedge v = 0$ であったから，p 項外積 $(v_1, \dots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ は交代的な p 重線型写像である．

定理 4.2.7. V, W を線型空間とする．任意の交代多重線型写像 $h\colon V^p \to W$ に対して，ある線型写像 $t\colon \bigwedge^p(V) \to W$ が唯一存在して，

$$t(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = h(v_1, \dots, v_p)$$

を満たす．

［証］ まず，$\bigwedge^p(V)$ を直接記述する．$\bigwedge^p(V)$ は p 重テンソル積 $T^p(V) = V \otimes \cdots \otimes V$ の商線型空間である．その射影 $T^p(V) \to \bigwedge^p(V)$ の核は，v^2 全体が生成する $T(V)$ のイデアル $D = D(V^2)$ の次数 p の元全体のなす線型空間である．命題 3.3.9 より，D_p は，$a, b \in T(V)$ として次数 p の項 av^2b の和全体からなる．a と

b を V の元の積の和で書けば，射影 $T^p(V) \to \bigwedge^p(V)$ の核は，どこか 2 つの連続する因子が等しい p 項積 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ 全体で生成される $T^p(V)$ の部分空間であるとわかる．

$h\colon V^p \to W$ を交代多重線型写像とする．h は多重線型写像であるから，唯一の線型写像 $s\colon T^p(V) \to W$ によって $h(v_1, \ldots, v_p) = s(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$ と書かれる．また，h は交代的であるから，どこか 2 つの隣り合う因子が等しいときはいつでも，つまり，射影 $T^p(V) \to \bigwedge^p(V)$ の核の元ならなんでも，s の値は 0 になる．よって，s は唯一の線型写像 $t\colon \bigwedge^p(V) \to W$ によって $s(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = t(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)$ と書かれる． □

4.3 行列式

正整数 n に対し，n 次対称群を S_n で書き表す．交代多重線型写像のある値の計算は，別の値の計算に帰着できる．

命題 4.3.1. V, W を線型空間，$h\colon V^n \to W$ を交代多重線型写像とする．h の各値 $h(v_1, \ldots, v_n)$ は，2 つの変数 v_i, v_j $(i \neq j)$ を入れ替えたとき，-1 倍になる．

［証］ $n = 1$ の場合は明白．以下，$n \geq 2$ とし，簡単のため v_1 と v_2 を入れ替える場合を考える．ここで，残りの変数は明記を省略する．h の多重線型性から

$$h(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = h(v_1, v_1) + h(v_1, v_2) + h(v_2, v_1) + h(v_2, v_2)$$

となる．h の交代性から，同じ元が反復されると $h(v, v) = 0$ となるのだった．よって，ここから $0 = h(v_1, v_2) + h(v_2, v_1)$，即ち $h(v_1, v_2) = -h(v_2, v_1)$ が従う． □

系 4.3.2. V, W を線型空間，$h\colon V^n \to W$ を交代多重線型写像，$\sigma \in S_n$ を置換とする．このとき，

$$h(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot h(v_1, \ldots, v_n) \tag{4.1}$$

が成り立つ．

［証］ 任意の置換は互換の積で書ける．命題 4.3.1 より，h の変数の互換は符号を変える．また，σ の偶奇は，それを構成する互換の数の偶奇で決まる．よって，σ が偶置換のとき，かつそのときに限り，前後で符号が保たれる． □

任意の置換 $\sigma \in S_n$ に対して (4.1) を満たす多重線型写像 $h\colon V^n \to W$ は**歪対称的**であるといわれる．このもとで，系 4.3.2 は「交代多重線型写像は歪対称である」と言い直される．一方，その逆は常には成り立たない[*3]．

ここで，新しい記号を導入する．正整数 n に対し，太字 $\boldsymbol{n}$ で標準的な n 元集合 $\boldsymbol{n} \coloneqq \{1, \ldots, n\}$ を指す．正整数 m, n に対し，写像 $\boldsymbol{i}\colon \boldsymbol{m} \to \boldsymbol{n}$ は，1 以上 n 以下の値を取る m 項列であるから，単に列ともよばれる．$\boldsymbol{i}$ による元の像は $i_k \coloneqq \boldsymbol{i}(k)$ とも略記される．ここには通常の数列に関する用語が流用される: $\boldsymbol{i}$ が増大列であるとは，$\boldsymbol{i}$ が $i_1 < \cdots < i_m$ を満たすことをいう．

[*3] 環 R に対して，環準同型 $\mathbb{Z} \to R$ が唯一存在する．この核は唯一の自然数 $n \in \mathbb{N}$ によって $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と書かれるが，この n を R の**標数**といい，$\operatorname{ch} R$ などと書かれる．体に限っても，標数が 2 の体においては，歪対称でない交代多重線型写像が存在する．他方，標数が 2 でない（標数が奇素数 p か 0 の）体では，歪対称多重線型写像は交代的になる．なお，係数体 K が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ のときは，$\operatorname{ch} K = 0$ なので，(4.1) の成立を以て「多重線型写像 h は交代的である」と定義する場合もある．

さて，正整数 n に対し，K^n の元 a を n 個のスカラーがなす（縦並びの）配列と見なすと，$(K^n)^n$ の元 $(a_1, \dots, a_n)$ は $n \times n$ 行列 A と同一視される．特に，単位行列 I は K^n の標準基底 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ の（標準的な並びの）組に対応する．これを以て，関数 $d\colon (K^n)^n \to K$ の値は，A の各列を a_i としたとき，$d(A)$ とも $d(a_1, \dots, a_n)$ とも書かれる．

以降，K に値を取る線型写像は，**線型形式**とよばれる．

定理 4.3.3. ある交代 n 重線型形式 $d\colon (K^n)^n \to K$ が唯一存在して，$d(I) = 1$ を満たす．より一般に，任意の $\kappa \in K$ に対し，ある交代 n 重線型形式 $d_\kappa\colon (K^n)^n \to K$ が唯一存在して，$d_\kappa(I) = \kappa$ を満たす．

［証］ そのような d が存在したとする．仮定 $d(I) = 1$ は，K^n の標準基底を $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ とおくと，$d(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = 1$ と書かれる．よって，d の交代性より，$\sigma \in S_n$ に対して

$$d(\varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, \varepsilon_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot d(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \operatorname{sgn}\sigma$$

となる．ここで，$n \times n$ 行列 A に対し，A の (i, j) 成分を A_{ij} とおくと，A の第 j 列は

$$\varepsilon_1 A_{1j} + \dots + \varepsilon_n A_{nj} = \sum_i \varepsilon_i A_{ij}$$

と書かれる．よって，

$$d(A) = d\left(\sum_{i(1)} \varepsilon_{i(1)} A_{i(1)1}, \dots, \sum_{i(n)} \varepsilon_{i(n)} A_{i(n)n}\right)$$

となる（ここでは $i(k)$ は形式的な記号）．d の多重線型性を用いて右辺を展開すると，これは列 $\boldsymbol{i}\colon \boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n}$ 全体に関する総和

$$d(A) = \sum_{\boldsymbol{i}} d(\varepsilon_{\boldsymbol{i}(1)}, \dots, \varepsilon_{\boldsymbol{i}(n)}) A_{\boldsymbol{i}(1)1} \cdots A_{\boldsymbol{i}(n)n}$$

になる．ここで，$d(\varepsilon_{\boldsymbol{i}(1)}, \dots, \varepsilon_{\boldsymbol{i}(n)})$ の 2 つの変数が被れば，d の交代性から値は 0 になる．よって，総和には単射（よって全単射）な $\boldsymbol{i}$ だけが残る．そのような $\boldsymbol{i}$ は置換である．そこで $\boldsymbol{i}$ を $\sigma \in S_n$ と読み替える．標準基底を並べ替えたときの d の値は知っていたので，

$$d(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n)n} \tag{4.2}$$

と計算される．これで d の値はすべての正方行列 A に対して決定されたので，$d(I) = 1$ を満たす交代 n 重線型形式 d は高々一つだとわかった．同様に，$d_\kappa(I) = \kappa$ を満たす d_κ は，（d の存在のうえで）(4.2) に κ を掛けたものとして得られ，それに限られる．

逆に，関数 $d\colon (K^n)^n \to K$ を (4.2) で定める．以下，d が仮定の 3 条件を満たすことを確認する．

第一に，多重線型性．(4.2) の各項は，正方行列 A の第 j 列中の成分に $A_{\sigma(j)j}$ を唯一もつので，A の第 j 列について線型である．よって，d は A の各列について線型であるから，n 重線型写像である．

第二に，交代性．簡単のため，A の第 1 列と第 2 列が一致している，即ち，すべての i で $A_{i1} = A_{i2}$ が成り立っているとする．置換はすべて偶置換か奇置換のいずれかである．また，$(1, 2)$ は奇置換で，任意の奇置換 τ は，ある偶置換 ρ によって $\tau = \rho(1, 2)$ と一意的に書かれる．この τ は $\operatorname{sgn}\tau = -1$ を満たし，ρ と併せて，$\tau(1) = \rho(2)$ および $\tau(2) = \rho(1)$，そして $i > 2$ のとき $\tau(i) = \rho(i)$ を満たす．従って，$d(A)$ の τ に係る項は

$$\begin{aligned} -A_{\tau(1)1} \cdots A_{\tau(n)n} &= -A_{\rho(2)1} A_{\rho(1)2} A_{\rho(3)3} \cdots A_{\rho(n)n} \\ &= -A_{\rho(2)2} A_{\rho(1)1} A_{\rho(3)3} \cdots A_{\rho(n)n} \\ &= -A_{\rho(1)1} A_{\rho(2)2} A_{\rho(3)3} \cdots A_{\rho(n)n} \end{aligned}$$

となる．符号を除けば，これは偶置換 ρ に係る $d(A)$ の項と一致する．よって，この組で $d(A)$ の項は打ち消しあい，値が 0 になる．従って，d は交代的である．

最後に，$d(I)=1$．恒等置換でない $\sigma \in S_n$ に対して，$A_{\sigma(1)1}, \ldots, A_{\sigma(n)n}$ の中に必ず一つは 0 が現れるので，$d(I)$ の $\sigma \neq 1$ に係る項はすべて消える．残りの項は $1^n=1$ であるので，$d(I)=1$ である．

以上で，(4.2) で明示的に定義された d が所望の交代 n 重線型形式であることが証明された． □

(4.2) は，通常の行列式の定義そのものである．つまり，行列式 $|A|=d(A)$ は，単位行列に対して 1 を返すような，各列に関する交代多重線型形式として，唯一のものである．

系 4.3.4. 任意の交代 n 重線型形式 $h\colon (K^n)^n \to K$ は，行列式の定数倍である．

［証］ 行列式の定数倍 $d_{h(I)}; A \mapsto h(I)|A|$ は交代的かつ n 重線型で，I で h と一致する．定理 4.3.3 の後半より，交代 n 重線型形式 $(K^n)^n \to K$ は I での値が決まれば一意的に決まるので，$d_{h(I)}=h$ である． □

いま，行列式の話題は二様の広がりをもつ．第一に，正方行列 A が線型写像 $t_A\colon K^n \to K^n; v \mapsto Av$ を定めたことから，K^n を渡る，そしてより一般に有限次元線型空間を渡る線型写像 $t\colon V \to V$ に対しても，行列式と類似の概念が定まる．そして第二に，行列式は，その交代多重線型性から，外積の言葉を用いて語られうる．

前半から片付けよう．自身への線型写像 $t\colon V \to V$ は**自己準同型**とよばれる．

命題 4.3.5. V を n 次元線型空間，$t\colon V \to V$ を自己準同型とする．このとき，あるスカラー $|t| \in K$ が唯一存在して，任意の交代 n 重線型形式 $d\colon V^n \to K$ に対し，

$$d(tv_1, \ldots, tv_n) = d(v_1, \ldots, v_n)|t|$$

を満たす．

［証］ まず，交代 n 重線型形式 $d\colon V^n \to K$ は，定数倍の違いしかもたない: $d, d_0\colon V^n \to K$ を非零な交代 n 重線型形式とする．このとき，同型写像 $\varphi\colon K^n \cong V$ を一つ取ると，

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto d(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n),$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto d_0(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n)$$

で定まる写像 $(K^n)^n \to K$ は，いずれも交代 n 重線型形式で，非零である．よって，系 4.3.4 から，ある定数 $\kappa \in K$ が唯一存在して

$$d(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) = \kappa d_0(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n)$$

を満たす．従って，

$$d(v_1, \ldots, v_n) = \kappa d_0(v_1, \ldots, v_n)$$

となる．d と d_0 の少なくとも一方が零写像の時は，一方が他方の 0 倍となるのでよい．

さて，同型 $V \cong K^n$ と行列式の合成により，非零な交代 n 重線型形式 $d_0\colon V^n \to K$ を一つ作れる．他すべての交代 n 重線型形式 d は d_0 の定数倍であるから，d_0 について主張が成り立つことを示せば十分である．対応

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto d_0(tv_1, \ldots, tv_n)$$

は V^n 上の交代 n 重線型形式であるから，d_0 の定数倍である．この定数を $|t|$ とすればよい． □

定義 4.3.6. V を有限次元線型空間，$t\colon V\to V$ を自己準同型とする．この一意的なスカラー $|t|$ を，**自己準同型 t の行列式**とよぶ．

自己準同型の行列式は，行列の行列式と確かに通じている．

命題 4.3.7. V を n 次元線型空間，$s,t\colon V\to V$ を自己準同型とする．このとき，$|s\circ t| = |s|\cdot|t|$ が成り立つ．

［証］ 自己準同型の行列式の定義より，

$$d(stv_1,\dots,stv_n) = d(tv_1,\dots,tv_n)|s| = d(v_1,\dots,v_n)|t|\cdot|s|$$

である．K は可換なので，$|s\circ t| = |t|\cdot|s| = |s|\cdot|t|$ である． □

命題 4.3.8. A を K 成分の n 次正方行列，$t_A\colon K^n\to K^n$ を A が誘導する線型写像 $t_A(v)=Av$ とすると，$|A| = |t_A|$ が成り立つ．

［証］ $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ を K^n の標準基底とすると，$t_A\varepsilon_j = \sum_i \varepsilon_i A_{ij}$ である．よって，$d\colon (K^n)^n\to K$ を通常の行列式とすると，

$$d(t\varepsilon_1,\dots,t\varepsilon_n) = d\left(\sum_i \varepsilon_i A_{i1},\dots,\sum_i \varepsilon_i A_{in}\right) = |A| = d(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)|A|$$

であるから，$|A| = |t_A|$ でなければならない． □

V を n 次元線型空間とし，$t\colon V\to V$ を線型写像とする．V の基底 $b_1,\dots,b_n$ に関する t の表現行列を A とおくと，このときも $|A| = |t|$ が成り立つ．$|t|$ の値は V の基底の取り方によらずに定まっているから，V の別の基底に関する t の表現行列 B に対して，$|A| = |B|$ が成り立つ．

ところで，途中で現れた非零な交代多重線型形式 $d\colon V^n\to K$ は，外積の各次数 p の部分の基底を明示的に記述する上で役立つ．V を n 次元線型空間，$b_1,\dots,b_n$ を V の基底とする．まず，p 重テンソル積 $T^p(V)$ は，列 $\boldsymbol{i}\colon \boldsymbol{p}\to\boldsymbol{n}$ に対する $b_{i_1}\otimes\cdots\otimes b_{i_p}$ 全体を基底にもった．よって，p 次外積 $\bigwedge^p(V)$ も，列 $\boldsymbol{i}\colon \boldsymbol{p}\to\boldsymbol{n}$ に対する $b_{\boldsymbol{i}} \coloneqq b_{i_1}\wedge\cdots\wedge b_{i_p}$ 全体で生成される．ここで，外積の交代性から，単射でない $\boldsymbol{i}$ で $b_{\boldsymbol{i}} = 0$ である．また，$i\neq j$ に対して $b_i\wedge b_j = -b_j\wedge b_i$ であるから，$\boldsymbol{i}$ は増大列全体にまで限定してよい．増大列 $\boldsymbol{i}$ はその像 $\boldsymbol{i}[\boldsymbol{p}]$ が決まれば決まり，像の選び方は $(n,p) = n!/(p!(n-p)!)$ 通りある．

命題 4.3.9. V を，基底に $b_1,\dots,b_n$ をもつ線型空間とする．V 上の外積代数 $\bigwedge(V)$ は，n より大きな次数で $\bigwedge^p(V) = 0$ になり，n 以下の次数で $\bigwedge^p(V)$ は増大列 $\boldsymbol{k}\colon\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{n}$ に係る $b_{\boldsymbol{k}}$ たち (n,p) 元を基底にもつ線型空間となる．

［証］ 最初に，$\bigwedge^n(V)$ で $b_1\wedge\cdots\wedge b_n\neq 0$ であることを示す．V は n 次元の線型空間であるから，非零な交代多重線型形式 $d\colon V^n\to K$ が存在する（例えば，V の所与の基底が与える同型と行列式の合成）．n 項外積 $v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ は普遍的な交代多重線型写像なので，ある線型写像 $t\colon \bigwedge^n(V)\to K$ が存在して $t(v_1\wedge\cdots\wedge v_n) = d(v_1,\dots,v_n)$ を満たす．特に

$$t(b_1\wedge\cdots\wedge b_n) = d(b_1,\dots,b_n)\neq 0$$

であるので，$b_1\wedge\cdots\wedge b_n$ は 0 でない．これで，$\bigwedge^n(V)$ が唯一の元 $b_1\wedge\cdots\wedge b_n$ を基底にもつことがわかった．

n 未満の次数 p を任意に固定する．$\bigwedge^p(V)$ を張る $b_{\boldsymbol{k}}$ 全体が線型従属であると仮定する．即ち，増大列 $\boldsymbol{k}\colon \boldsymbol{p}\to\boldsymbol{n}$ 全体についての非自明な（あるところで $\lambda_{\boldsymbol{h}}\neq 0$ となる）線型関係 $\sum_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}\lambda_{\boldsymbol{k}}=0$ が存在すると仮定する．このもとで矛盾を導く．

仮定の増大列 $\boldsymbol{h}$ を一つ取る．$\boldsymbol{h}$ に含まれていない添字は $n-p$ 項の増大列 $h'_1,\dots,h'_{n-p}$ をなす．これを $\boldsymbol{h}'$ とおくと，$b_{\boldsymbol{h}'}\wedge b_{\boldsymbol{h}}$ は $b_1\wedge\cdots\wedge b_n$ と少なくとも符号を除いて一致する．また，p 項増大列 $\boldsymbol{k}$ が $\boldsymbol{h}$ と異なるとき，$\boldsymbol{k}$ と $\boldsymbol{h}'$ は少なくとも一つの添字を共有するので，$b_{\boldsymbol{h}'}\wedge b_{\boldsymbol{k}}=0$ である．よって，

$$0=\sum_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}\lambda_{\boldsymbol{k}}=b_{\boldsymbol{h}'}\wedge\left(\sum_{\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}\lambda_{\boldsymbol{k}}\right)=b_{\boldsymbol{h}'}\wedge b_{\boldsymbol{h}}\lambda_{\boldsymbol{h}}=\pm(b_1\wedge\cdots\wedge b_n)\lambda_{\boldsymbol{h}}$$

となる．しかし，$b_1\wedge\cdots\wedge b_n\neq 0$ だったので $\lambda_{\boldsymbol{h}}=0$ を得，仮定と矛盾する．

以上より，$b_{\boldsymbol{k}}$ 全体は線型独立である．これは $\bigwedge^p(V)$ を生成したので，$\bigwedge^p(V)$ の基底である． □

定理 4.3.10. V を n 次元線型空間とする．自己準同型 $t\colon V\to V$ の行列式 $|t|$ は，V の任意の n 元 $v_1,\dots,v_n$ に対して

$$tv_1\wedge\cdots\wedge tv_n=(v_1\wedge\cdots\wedge v_n)|t|$$

を満たす．

［証］ n 次外積 $\bigwedge^n V$ は 1 次元なので，同型写像 $\varphi\colon \bigwedge^n V\cong K$ を一つ取れる．n 項外積 $v_1\wedge\cdots\wedge v_n$ は交代多重線型写像であったから，これと φ の合成は交代多重線型形式となる．それを命題 4.3.5 の d に取ればよい． □

述べ方を変えよう．n 次元線型空間 V 上の自己準同型 $t\colon V\to V$ は，$\bigwedge^n(V)$ 上の自己準同型を

$$\bigwedge^n(t)(v_1\wedge\cdots\wedge v_n)=tv_1\wedge\cdots\wedge tv_n$$

の形で誘導する．$\bigwedge^n(V)$ の次元は 1 であるから，この写像は $\bigwedge^n(V)$ 上のある定数倍写像に限られる．そのスカラーの正体が，t の行列式 $|t|$ である．

行列式の話題は，ここを始点としてもよい: 行列式の話題は，ここを始点としてもよい: K 成分の n 次正方行列 A は，V の基底 $b_1,\dots,b_n$ に関する表現行列に A をもつ線型写像 $t_A\colon V\to V$ を誘導する．つまり，$t_Ab_j=\sum_i b_iA_{ij}$ である．定理 4.3.10 で，特に v_i として b_i たちを選んでくると，

$$\left(\sum_i b_iA_{i1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_i b_iA_{in}\right)=(b_1\wedge\cdots\wedge b_n)|A|$$

となる．この左辺を，n 項外積の多重線型性から展開すると，列 $\boldsymbol{i}\colon\boldsymbol{n}\to\boldsymbol{n}$ 全体に関する総和

$$\sum_{\boldsymbol{i}}(b_{\boldsymbol{i}(1)}\wedge\cdots\wedge b_{\boldsymbol{i}(n)})A_{\boldsymbol{i}(1)1}\cdots A_{\boldsymbol{i}(n)n}=(b_1\wedge\cdots\wedge b_n)|A|$$

が現れる．外積の交代性から，どれか 2 つの因子が被る項は消えるので，$\boldsymbol{i}$ が置換 $\boldsymbol{i}=\sigma$ となるものだけが和に残る．因子の 2 つを入れ替えると符号が変わるので，一般に

$$b_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge b_{\sigma(n)}=\operatorname{sgn}\sigma\cdot b_1\wedge\cdots\wedge b_n$$

である．従って，

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot A_{\sigma(1)1}\dots A_{\sigma(n)n}=|A|$$

を得，行列式の明示的な公式を復元できた．

本講は，これで終わりである．

参考文献

[1] Garrett Birkhoff, Saunders Mac Lane, *Algebra*. New York: Macmillan, 1967.

[2] Yaghoub Sharifi, *Abstract Algebra: Ideals of the ring of endomorphisms of a vector space*. `https://ysharifi.wordpress.com/2011/10/05/`. 2011/10/05. 最終閲覧 2024/03/13.

[3] 川久保勝夫，線形代数学［新装版］．日本評論社，2010–2021.

[4] 横沼健雄，テンソル空間と外積代数（岩波講座基礎数学 線型代数 4）．岩波書店，1977.

謝辞

友人の M 君には，ノートの構成や論証，誤字脱字等に関する確認を手伝ってもらいました．ありがとうございます.

動画リンク

1 章　第 2 講 A(sm43468336)
2 章　第 2 講 B(sm43525817)
3 章　第 2 講 C(sm44275633)
4 章　第 2 講 D(sm46136709)

更新履歴

2024/03/01　1 章公開.
2024/03/15　2 章公開.
2024/11/01　3 章公開.
2026/04/06　4 章公開.