ボイボ寮生 数学講座　ノート

第 3 講　二重の商

麻崎系 @cor_asazaki

2024 年 9 月 28 日

概要

本講では，商を二重に取る操作について議論する．
読者に確認を委ねる部分は，青字で示した．
本講は，第 3 回ソフトウェアトーク理工サイド交流祭に参加する．

目次

1　二重の商

1.1　準備

本講を通して，写像をいくつか合成するとき，合成の記号を省略することがある．例えば，f, g, h の合成を $f \circ g \circ h$ の代わりに fgh とも書く．

まず，商集合とその周辺知識について手短に確認する．

定義 1.1.1. X を集合とする．X 上の二項関係 $\sim$ が**同値関係**であるとは，$\sim$ が次の 3 条件をすべて満たすことをいう:

(ER1)［反射律］ 任意の $x \in X$ に対して $x \sim x$ である．
(ER2)［対称律］ 任意の $x, y \in X$ に対して，$x \sim y$ ならば $y \sim x$ である．
(ER3)［推移律］ 任意の $x, y, z \in X$ に対して，「$x \sim y$ かつ $y \sim z$」ならば $x \sim z$ である．

定義 1.1.2. X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対し，X の部分集合 $[x] \coloneqq \{y \in X \mid y \sim x\}$ を，$\sim$ に関する x の**同値類**とよぶ．同値類 α に対し，$x \in \alpha$ を満たす $x \in X$ を，α の**代表元**とよぶ．同値類全体の集合

$$X/{\sim} \coloneqq \{[x] \subseteq X \mid x \in X\} = \{\alpha \subseteq X \mid \exists x \in X; \alpha = [x]\}$$

を，X の $\sim$ による**商集合**とよぶ．

定義から直ちに，必ず，同値類は空でない．特に，$X = \emptyset$ の場合（X 上の同値関係 $\sim$ には自明なものだけが唯一取れるが），$X/{\sim} = \emptyset$ である．

X の $\sim$ による商集合を求めることは，俗に X を $\sim$ で**割る**とも言われる．この用語は本講でも用いられる．

命題 1.1.3. X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする．任意の $x, y \in X$ に対し，次の 3 条件は同値である．

(a) $x \sim y$.
(b) $[x] = [y]$.
(c) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

［証］ ((a)⇒(b)) $z \in X$ を任意に取る．$z \sim x$ ならば，仮定により $x \sim y$ であるから，推移律により $z \sim y$ である．逆に $z \sim y$ ならば，仮定と対称律により $y \sim x$ であるから，推移律により $z \sim x$ である．よって，

$$[x] = \{z \in X \mid z \sim x\} = \{z \in X \mid z \sim y\} = [y]$$

が成り立つ．

((b)⇒(c)) $x \in [x]$ であるから，$x \in [y]$ である．よって，$x \in [x] \cap [y]$ であるから，$[x] \cap [y] \neq \emptyset$ が成り立つ．

((c)⇒(a)) ある $z \in X$ が存在して，$z \in [x] \cap [y]$ を満たす．この z を一つ取る．すると，$z \sim x$ かつ $z \sim y$ である．対称律により $x \sim z$ であるから，推移律により $x \sim y$ が成り立つ．　□

X 上の同値関係 $\sim$ を与えることは，その商集合 $X/{\sim}$ を与えることと，次の意味で等価である．

定義 1.1.4. X を集合，$\mathcal{F}$ を X の部分集合族とする．$\mathcal{F}$ が X の**分割**である，あるいは $\mathcal{F}$ が X を**分割する**とは，$\mathcal{F}$ が次の 3 条件をすべて満たすことをいう:

(D1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ である．
(D2) $X = \bigcup \mathcal{F}$ である．
(D3) 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ に対して，$A \neq B$ ならば $A \cap B = \emptyset$ である．

例題 1.1.5. X を集合とする．以下の (1)–(3) を示せ．

(1) $\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき，商集合 $X/\sim$ は X を分割する．
(2) $\mathcal{F}$ を X の分割とする．このとき，X 上の二項関係 $\sim$ を，$x, y \in X$ に対して

$$x \sim y \underset{\text{def}}{\iff} \exists A \in \mathcal{F}; (x \in A \wedge y \in A)$$

で定めると，$\sim$ は X 上の同値関係となる*1．
(3) (1) のもとで，$X/\sim$ に (2) を施して得られる X 上の同値関係 $\sim'$ は $\sim$ と一致する．また，(2) のもとで，$\sim$ に (1) を施して得られる X の分割 $X/\sim$ は族 $\mathcal{F}$ と一致する．

定義 1.1.6. X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする．写像

$$\pi\colon X \to X/\sim; x \mapsto [x]$$

を，**商写像**や**自然な射影**などとよぶ．

例題 1.1.7. 商写像は全射である．

命題 1.1.8. 全射は**右簡約可能**である．即ち，次が成り立つ: X, Y, Z を集合，$f\colon X \to Y$, $g_1, g_2\colon Y \to Z$ を写像とし，f は全射とする．このとき，$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ならば $g_1 = g_2$ が成り立つ．

［証］ $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ を仮定する．$y \in Y$ を任意に取る．f は全射であるから，ある $x \in X$ が存在して，$f(x) = y$ を満たす．この x を一つ取る．仮定から，$g_1(y) = g_1 f(x) = g_2 f(x) = g_2(y)$ である．従って，$g_1 = g_2$ が成り立つ． □

商集合上の写像 $f\colon X/\sim \to Y$ は，$f([x]) = (x$ の式$)$ のように，しばしば代表元を用いた形で定義される．このとき，f が $[x]$ の代表元の取り方によらないこと，即ち，条件「$x \sim y$ を満たす任意の $x, y \in X$ に対して $f([x]) = f([y])$」が成り立つことを確認しなければならない．この条件を満たす f は **well-defined** であるという．well-defined でない "写像" は，定義が成立していないため，写像としての意味をもたない．

Well-defined な写像を構成するのは，言い換えれば，商集合の普遍性を用いるのと同じことである．

定義 1.1.9. **図式**とは，いくつかの集合を，それらを渡る写像で繋いだものである．集合は通常の文字で，写像は矢印で，それぞれ書かれる．図式が**可換**であるとは，矢印の連なりが，始点と終点を同じくするとき，どれも同じ（合成）写像を定めることをいう．

定理 1.1.10. X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とする．このとき，商集合 $X/\sim$ と商写像 $\pi\colon X \to X/\sim$ は，普遍性を満たす: 任意の集合 Y と，条件「任意の $x, y \in X$ に対して，$x \sim y$ ならば $f(x) = f(y)$」を満たす任意の写像 $f\colon X \to Y$ に対し，ある写像 $\tilde{f}\colon X/\sim \to Y$ がただ一つ存在して，$\tilde{f} \circ \pi = f$ を満たす．

*1 ヒント: 推移律の証明に注意！

［証］　次の図式の π, f は所与である．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X/{\sim} \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

まず，$\tilde{f}$ の存在を示す．$x \in X$ に対し，$\tilde{f}([x]) \coloneqq f(x)$ と定める．この写像は well-defined である: $x \sim y$ を満たす任意の $y \in X$ に対して，f の仮定から $f(x) = f(y)$ である．この $\tilde{f}$ は，定義から直ちに $\tilde{f} \circ \pi = f$ を満たす．

次に，$\tilde{f}$ の一意性を示す．写像 $\tilde{g} \colon X/{\sim} \to Y$ を，$\tilde{g} \circ \pi = f$ を満たすよう任意に取る．このとき，任意の $x \in X$ に対して $\tilde{g}([x]) = f(x) = \tilde{f}([x])$ であるから，$\tilde{g} = \tilde{f}$ が成り立つ．$\square$

集合 X と，$X \times X$ の部分集合 R に対し，$(x, y) \in R$ であることを xRy と略記する[*2]．これにより，X 上の二項関係（特に同値関係）は $X \times X$ の部分集合として実装される．

命題 1.1.11. X を集合，$\mathcal{R}$ を X 上の同値関係の（全体とは限らない）集合とする．このとき，$\bigcap \mathcal{R}$ も X 上の同値関係である．ただし，$\mathcal{R} = \emptyset$ のときは $\bigcap \mathcal{R} = X \times X$ と約束する．

［証］　$R \coloneqq \bigcap \mathcal{R}$ とおく．xRy が $(x, y) \in \bigcap \mathcal{R}$ の略記であることに注意．R が同値関係の 3 条件を満たすことを確かめる．

(ER1) $x \in X$ を任意に取る．このとき，任意の $S \in \mathcal{R}$ に対して，S の反射律により xSx である．よって，xRx が成り立つ．

(ER2) $x, y \in X$ を，xRy を満たすよう任意に取る．このとき，任意の $S \in \mathcal{R}$ に対して xSy である．よって，S の対称律により ySx である．つまり，yRx が成り立つ．

(ER3) $x, y, z \in X$ を，xRy かつ yRz を満たすよう任意に取る．このとき，任意の $S \in \mathcal{R}$ に対して，xSy かつ ySz である．よって，S の推移律により xSz である．つまり，xRz が成り立つ．

以上の (ER1)–(ER3) から，R は X 上の同値関係である．$\square$

定義 1.1.12. X を集合，S を X 上の二項関係とする．命題 1.1.11 により，

$$R \coloneqq \bigcap \{ R' \subseteq X \times X \mid R' \text{ は } X \text{ 上の同値関係で，} S \subseteq R' \}$$

は X 上の同値関係となり，しかも $S \subseteq R'$ を満たす X 上の同値関係 R' のなかで（包含関係に関して）最小となる．この R を，X 上の S によって**生成される**同値関係とよぶ．

1.2　一般論

以降，集合 X と X 上の同値関係 R に対し，商写像を $\pi_R \colon X \to X/R$，$x \in X$ の R に関する同値類を $[x]_R$ と書く．

この節を通して，X を集合，R, T を X 上の同値関係として固定し，「任意の $x, y \in X$ に対して，xRy ならば xTy」が成り立つと仮定する．この仮定は，$R \subseteq T$ と同じことである．

[*2] LaTeX においてこれを（構造的に）正確に書くと $x \mathrel{R} y$ (`x \mathrel{R} y`) であるが，慣例にならって xRy (`x R y`) とする．

商集合 X/T を求めたいときに，X を直接 T で割るのではなく，複数回に渡って商を取る方が，イメージや操作が簡単または直観的なことがある．その際，最初に T より細かい同値関係 R で X を割るのはよいが，更に X/R をどのような同値関係で割るのかが問題である．まずは，この同値関係を具体的に与えよう．

命題 1.2.1. X/R 上の二項関係 S を，$\alpha, \beta \in X/R$ に対して

$$\alpha S \beta \underset{\text{def}}{\iff} \exists x \in \alpha; \exists y \in \beta; xTy$$

で定める．この S は X/R 上の同値関係である．

［証］ S が同値関係の 3 条件を満たすことを確かめる．

(ER1) $\alpha \in X/R$ を任意に取る．代表元 $x \in \alpha$ を一つ取る．このとき，T の反射律により xTx である．よって，$\alpha S \alpha$ が成り立つ．

(ER2) $\alpha, \beta \in X/R$ を，$\alpha S \beta$ を満たすよう任意に取る．このとき，ある $x \in \alpha$ と $y \in \beta$ が存在して xTy である．この x と y を一つずつ取る．T の対称律により yTx であるから，$\beta S \alpha$ が成り立つ．

(ER3) $\alpha, \beta, \gamma \in X/R$ を，$\alpha S \beta$ かつ $\beta S \gamma$ を満たすよう任意に取る．このとき，ある $x \in \alpha,\ y, y' \in \beta,\ z \in \gamma$ が存在して，xTy かつ $y'Tz$ である．この x, y, y', z を一つずつ取る．このとき，y と y' の取り方により yRy' であるが，T の設定から yTy' である．よって，T の推移律により xTz である．つまり，$\alpha S \gamma$ が成り立つ．

以上の (ER1)–(ER3) から，S は X/R 上の同値関係である． □

これで，商集合 $(X/R)/S$ が定義される．これは，集合の素性としては $X/R \subseteq \mathcal{P}(X)$ の部分集合族であるから，一般に $X/T \subseteq \mathcal{P}(X)$ とは一致しない．しかし，次に見るとおり，これらは自然に同一視することができる．

定理 1.2.2. 全単射 $h_{RS} \colon (X/R)/S \cong X/T$ が存在して，$h_{RS}\pi_S\pi_R = \pi_T$ を満たす．

［証］ まず，次の図式の π_R, π_S, π_T は所与である．

$$\begin{tikzcd}
X/R \arrow[d, "\pi_S"'] \arrow[dr, dotted, "h_R"] & X \arrow[l, "\pi_R"'] \arrow[d, "\pi_T"] \\
(X/R)/S \arrow[r, dotted, "h_{RS}"'] & X/T
\end{tikzcd}$$

任意の $x, y \in X$ に対して，xRy ならば xTy であった．よって，商集合の普遍性により，写像 $h_R \colon X/R \to X/T$ がただ一つ存在して，$h_R\pi_R = \pi_T$ を満たす．この h_R を取る．

次に，$\alpha, \beta \in X/R$ を，$\alpha S \beta$ を満たすよう任意に取る．このとき，ある $x \in \alpha$ と $y \in \beta$ が存在して，xTy を満たす．この x と y を一つずつ取る．すると，$[x]_R = \alpha$ かつ $[y]_R = \beta$ であるから，$h_R(\alpha) = h_R\pi_R(x) = \pi_T(x) = \pi_T(y) = h_R\pi_R(y) = h_R(\beta)$ である．従って，商集合の普遍性により，写像 $h_{RS} \colon (X/R)/S \to X/T$ がただ一つ存在して，$h_{RS}\pi_S = h_R$，即ち $h_{RS}\pi_S\pi_R = \pi_T$ を満たす．この h_{RS} を取る．

続いて，次の図式の π_R, π_S, π_T も所与である．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\pi_R"] \arrow[d, "\pi_T"'] & X/R \arrow[d, "\pi_S"] \\
X/T \arrow[r, dotted, "h_T"'] & (X/R)/S
\end{tikzcd}
$$

$x, y \in X$ を，xTy を満たすよう任意に取る．このとき，$x \in [x]_R$ かつ $y \in [y]_R$ であるから，$[x]_R S [y]_R$，即ち $\pi_S\pi_R(x) = \pi_S\pi_R(y)$ である．よって，商集合の普遍性により，写像 $h_T \colon X/T \to (X/R)/S$ がただ一つ存在して，$h_T\pi_T = \pi_S\pi_R$ を満たす．この h_T を取る．

さて，2 つの等式 $h_{RS}\pi_S\pi_R = \pi_T$ および $h_T\pi_T = \pi_S\pi_R$ が得られた．これにより，2 つの等式 $h_{RS}h_T\pi_T = \pi_T$ および $h_T h_{RS}\pi_S\pi_R = \pi_S\pi_R$ が得られる．全射の合成は再び全射で，全射は右簡約可能であった．よって，（適切な集合上で）$h_{RS}h_T = \mathrm{id}$ と $h_T h_{RS} = \mathrm{id}$ が成り立つ．つまり，h_{RS} は全単射である．これで証明が完了した．$\square$

1.3 具体例

例 1.3.1. $I \coloneqq [0,1]$ を単位閉区間とする．I^2 上の二項関係 $\sim$ を，$(x,y),(x',y') \in I^2$ に対し，

$$(x,y) \sim (x',y') \underset{\text{def}}{\iff} \exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2; (x,y) = (x'+m, y'+n)$$

と定めると，$\sim$ は I^2 上の同値関係である．商集合 $T^2 \coloneqq I^2/{\sim}$ を 2 次元**トーラス**とよぶ．

$\sim$ が真に同一視する点は，正方形 I^2 の「縁」の点である．より明示的（だが少々雑）に言えば，各 $t \in I$ に対して，2 点 $(t,0)$ と $(t,1)$ の組，および 2 点 $(0,t)$ と $(1,t)$ の組が $\sim$ によって同一視され，あとはそのまま残る．特に，隅の 4 点 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ は $\sim$ に関して同じ同値類に属する．直観的に言えば，2 次元トーラス T^2 は，正方形の左右の辺を同じ向きで，上下の辺も同じ向きで，それぞれ同一視する（貼り合わせる）ことにより作られる．外観は，ドーナツの表面である．

ここで，$\sim$ より細かい I^2 上の同値関係 R_1 と R_2 を，次のようにして定めることができる．即ち，$(x,y),(x',y') \in I^2$ に対して，

$$
\begin{aligned}
(x,y) R_1 (x',y') &\underset{\text{def}}{\iff} \exists m \in \mathbb{Z}; (x,y) = (x'+m, y'), \\
(x,y) R_2 (x',y') &\underset{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{Z}; (x,y) = (x', y'+n)
\end{aligned}
$$

と定めるのである．R_1 は I^2 の左右の辺だけを，R_2 は I^2 の上下の辺だけを，それぞれ同じ向きで同一視する．これら I^2 上の同値関係 R_i $(i=1,2)$ は明らかに，任意の $(x,y),(x',y') \in I^2$ に対して，$(x,y)R_i(x',y')$ ならば $(x,y) \sim (x',y')$ を満たす．よって，先ほどの一般論を適用することができる．

R_1 について見ていこう．自然な方法で I^2/R_1 上に誘導される同値関係 S_1 は，$\alpha, \beta \in I^2/R_1$ に対して

$$\alpha S_1 \beta \underset{\text{def}}{\iff} \exists (x,y) \in \alpha; \exists (x',y') \in \beta; (x,y) \sim (x',y')$$

で定まる．これを同値変形していくと，

$$
\begin{aligned}
\alpha S_1 \beta &\iff \exists (x,y) \in \alpha; \exists (x',y') \in \beta; \exists (m,n) \in \mathbb{Z}^2; (x,y) = (x'+m, y'+n) \\
&\iff \exists (x,y) \in \alpha; \exists (x',y') \in \beta; \exists n \in \mathbb{Z}; (x,y) = (x', y'+n) \\
&\iff \exists (x,y) \in \alpha; \exists (x',y') \in \beta; (x,y) R_2 (x',y')
\end{aligned}
$$

となる．よって，I^2 を $\sim$ で割る操作を，「左右の辺を同じ向きで同一視し，続いて上下の辺を同じ向きで素直に同一視する」二段階の操作に分けてもよいことがわかった．これは，R_2 から始めても同様である．つまり，左右の辺の同一視と，上下の辺の同一視とのどちらを先に実行しても，そうして作られる集合は T^2 と自然に同一視される．

そして，いま一つ特徴的なのは次の事実である．

命題 1.3.2. I^2 上の同値関係 $\sim$ は，R_1 と R_2 によって生成される．

［証］ R を，R_1 と R_2 によって生成される I^2 上の同値関係とする．$R = \sim$ を示す．

- ($\subseteq$) $\sim$ は I^2 上の同値関係で，$R_1 \subseteq \sim$ かつ $R_2 \subseteq \sim$ を満たす．よって，生成される同値関係の定義により，$R \subseteq \sim$ が成り立つ．
- ($\supseteq$) $(x, y), (x', y') \in I^2$ を，$(x, y) \sim (x', y')$ を満たすよう任意に取る．このとき，ある $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ が存在して $(x, y) = (x' + m, y' + n)$ を満たす．この (m, n) を一つ取る．すると，m と n それぞれによって，$(x, y)R_1(x', y)$ かつ $(x', y)R_2(x', y')$ である．R は R_1 と R_2 によって生成されるから，$(x, y)R(x', y)$ かつ $(x', y)R(x', y')$ を得る．よって，R の推移律により，$(x, y)R(x', y')$ である．つまり，$R \supseteq \sim$ が成り立つ．

以上から，$R = \sim$ が成り立つ． □

この例を「行儀が良い」と言える理由は，次の 3 点に集約される:

- I^2 上の同値関係 $\sim$ を生成するような，I^2 上のより細かい同値関係 R_1 と R_2 を用意できたこと．
- そのもとで，I^2/R_1 上のしかるべき同値関係 S_1 が，任意の $\alpha, \beta \in I^2/R_1$ に対して

  $$\alpha S_1 \beta \iff \exists (x, y) \in \alpha; \exists (x', y') \in \beta; (x, y)R_2(x', y')$$

  を満たすこと．
- 自然な全単射 $(I^2/R_1)/S_1 \cong I^2/\sim$ が存在すること．

今回のように，$x, y \in X$ に対する xR_2y の判定が（$x \sim y$ のそれより）容易なとき，$X/\sim$ の計算はかなり楽になる．そこで，「これと同じことが一般の集合でも起こるか？」という疑問が，自然に生じる．

疑問 1.3.3. X を集合，R_1, R_2 を X 上の同値関係，R を R_1 と R_2 によって生成される X 上の同値関係とする．このとき，X/R_1 上の二項関係 S_1 を，$\alpha, \beta \in X/R_1$ に対して

$$\alpha S_1 \beta \underset{\text{def}}{\iff} \exists x \in \alpha; \exists y \in \beta; xR_2y$$

で定めたとき，自然な全単射 $(X/R_1)/S_1 \cong X/R$ は存在するか？

少しの間，お考えいただこう．

答えは，NO である．

例 1.3.4. $X \coloneqq \{1,2,3,4\}$ とし，X の分割 $\mathcal{F}_1$ と $\mathcal{F}_2$ を

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &\coloneqq \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\},\\ \mathcal{F}_2 &\coloneqq \{\{1,2\},\{3,4\}\}\end{aligned}$$

で与えることにより，X 上の同値関係 R_1 と R_2 を定める．$X/R_1 = \mathcal{F}_1$ 上の二項関係 S_1 を，$\alpha,\beta \in X/R_1$ に対して

$$\alpha S_1 \beta \underset{\text{def}}{\iff} \exists x \in \alpha; \exists y \in \beta; x R_2 y$$

と定める．このとき，S_1 は X/R_1 上の同値関係でない．実際，$\alpha = \{1\}$，$\beta = \{2,3\}, \gamma = \{4\}$ とおくと，$\alpha S_1 \beta$ かつ $\beta S_1 \gamma$ は成り立つが，$\alpha S_1 \gamma$ は成り立たない．

実は，疑問 1.3.3 の S_1 が反射律と対称律を満たすことまでは証明できる．しかし，推移律を満たすことは証明できず，実際にこのような反例が存在する．

$\alpha S_1 \beta$ は，もともと $\exists x \in \alpha; \exists y \in \beta; x R y$ と書かれるべき関係であった．この R を R_2 と安易に書き換えてはならないのは，R の別な特徴付けに理由がある．

以下の 2 つの用語は，本講だけで用いる便宜的なものである[*3]．

定義 1.3.5. X を集合，S を X 上の二項関係とし，$x,y \in X$ とする．x と y を結ぶ S 上の**道**とは，2 以上のある自然数 $n \in \mathbb{N}$ と，X 上の有限列 $(z_k)_{1 \leq k \leq n}$ の組であって，次の 2 条件をすべて満たすもののことである．

(P1) $z_1 = x$ かつ $z_n = y$ である．
(P2) 任意の $k \in \{1,\ldots,n-1\}$ に対して，「$z_k = z_{k+1}$ または $z_k S z_{k+1}$ または $z_{k+1} S z_k$」である．

定義 1.3.6. X を集合，S を X 上の二項関係とする．X 上の二項関係 $\tilde{S}$ を，$x,y \in X$ に対して

$$x\tilde{S}y \underset{\text{def}}{\iff} x \text{ と } y \text{ を結ぶ } S \text{ 上の道 } (n,(z_k)_k) \text{ が存在する}$$

で定める．$\tilde{S}$ を X 上の **S-道関係**とよぶ．

例題 1.3.7. X を集合，S を X 上の二項関係とする．S-道関係 $\tilde{S}$ は X 上の同値関係である．

命題 1.3.8. X を集合，S を X 上の二項関係とする．S-道関係 $\tilde{S}$ は，X 上の S によって生成される同値関係 R と一致する．

［証］ $R = \tilde{S}$ を示す．

($\subseteq$) $\tilde{S}$ は同値関係で，明らかに $S \subseteq \tilde{S}$ を満たす．よって，生成される同値関係の定義により，$R \subseteq \tilde{S}$ が成り立つ．

($\supseteq$) $x,y \in X$ を，$x\tilde{S}y$ を満たすよう任意に取る．このとき，x と y を結ぶ S 上の道 $(n,(z_k)_k)$ が存在するので，これを一組取る．$k \in \{1,\ldots,n-1\}$ を任意に取る．すると，$z_k = z_{k+1}$ または $z_k S z_{k+1}$ または $z_{k+1} S z_k$ が成り立つ．このいずれにせよ，$S \subseteq R$ であるから，R の反射律と対称律により $z_k R z_{k+1}$ である．よって，R の推移律により $z_1 R z_n$，即ち $x R y$ である．つまり，$R \supseteq \tilde{S}$ が成り立つ．

[*3] 一般的な用語があるかもしれないが，筆者は知らない．

以上から，$R = \tilde{S}$ が成り立つ． $\square$

この結果を具体化しよう．

X を集合，R_1 と R_2 を X 上の同値関係，R を R_1 と R_2 によって生成される X 上の同値関係とする．このとき，任意の $x, y \in X$ に対して，xRy であることは，x と y を結ぶ $R_1 \cup R_2$ 上の道 $(n, (z_k)_k)$ が存在することと同値である．よって特に，1 または 2 の値だけを取る有限列 $(i_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ が存在して，任意の $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対して $z_k R_{i_k} z_{k+1}$ を満たす．つまり，

$$x = z_1 R_{i_1} z_2 R_{i_2} \ldots R_{i_{n-1}} z_n = y$$

が成り立つ．そして，X/R_1 上の同値関係

$$\alpha S_1 \beta \underset{\text{def}}{\iff} \exists x \in \alpha; \exists y \in \beta; xRy$$

に現れる R を R_2 に置き換えてよいか，という問題は，$x \in \alpha$ と $y \in \beta$ をうまく取り替えることにより，x と y を結ぶ $R_1 \cup R_2$ 上の道を

$$x = z_1 R_2 z_2 = y$$

にまで縮約できるかどうか，即ち，「x と y を結ぶ $R_1 \cup R_2$ 上の道を，（R_1 のほかには）R_2 を高々 1 回しか使わない道にまで縮約できるか」に帰着される．この縮約は，行儀の良い場合（例 1.3.1）なら R_1 と R_2 を入れ替えたとしても可能だが，一般には（例 1.3.4）可能でない．直観的に容易な操作が，論理的にも容易に記述できるとは限らないのである．

本講は，これで終わりである．

参考文献

[1] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*, second edition. New York: Springer, 2011.
[2] Nicolas Bourbaki, 前原昭二 編，前原昭二 訳．ブルバキ数学原論，集合論要約．東京図書，1968.
[3] 内田伏一．集合と位相（増補新装版）．裳華房，2020.

動画リンク

1 章　第 3 講 (sm44154333)

更新履歴

2024/09/28　1 章公開.